



Funciones generalizadas

Generalized functions

Walter Manuel Murillo López

Lic. en ciencias de la educación con
mención en Matemática.

Estudiante del Doctorado en
Matemática Aplicada, UNAN –
Managua, Nicaragua.

<https://orcid.org/0009-0005-4774-6365>

walter.murillo@dati.uni.edu.ni

Iván Augusto Cisneros Díaz

Doctor en Matemática Aplicada

UNAN – Managua, Nicaragua.

<https://orcid.org/0000-0003-2014-1946>

ivan.cisneros@unan.edu.ni

Enviado el 31 de marzo, 2025 / Aceptado el 15 de diciembre, 2025

<https://doi.org/10.5377/rtu.v14i41.22053>

Palabras Clave: Análisis asintótico, ecuaciones diferenciales, funciones, integrales, funciones generalizadas, distribuciones.

Keywords: Asymptotic analysis, differential equations, functions, integrals, generalized functions, distributions.

RESUMEN

El análisis asintótico es una antigua materia que tiene aplicaciones en varios campos de la matemática pura y aplicada, en física e ingeniería. Las técnicas asintóticas son usadas para aproximar expresiones integrales complicadas que resultan de distintas transformaciones de análisis.

También las soluciones de algunas ecuaciones diferenciales son calculadas con mayor precisión usando técnicas asintóticas. Una característica importante en la teoría de expansiones asintóticas es que juega un papel importante con la experiencia y la intuición al resolver problemas particulares vinculados con la naturaleza.

El objetivo de este estudio es presentar aproximaciones de esta teoría usando funciones generalizadas. La teoría de funciones generalizadas es otra área importante dentro de la matemática, en la cual se han encontrado aplicaciones para la física e ingeniería. En diversos estudios se han encontrado la relación entre las técnicas asintóticas y la teoría de distribuciones. La investigación se orienta a saber en qué espacios de distribuciones tales como $E^{\wedge}(\mathbb{R}), P^{\wedge}(\mathbb{R}), O_{\gamma^{\wedge}}(\mathbb{R})$, la expansión es válida.

La técnica del momento de la expansión asintótica es válida para muchas variedades de núcleos, tales como funciones generalizadas de rápido decrecimiento y de rápidas oscilaciones. También la expansión asintótica proporciona desarrollo de muchas integrales y series.

Algunas series pueden ser convergentes y asintótica, sin embargo, existen series divergentes que son asintótica, es por esta razón que las series asintótica están referida a series divergentes.

Las distribuciones de rápido decaimiento en el infinito son de fundamental importancia en el estudio de las expansiones asintótica de funciones generalizada. Esta expansión inmediatamente da el desarrollo clásico de varias integrales y series. El momento de la expansión asintótica está referido con la expansión de los núcleos distribucionales del tipo $f(\lambda x)$ cuando $\lambda \rightarrow \infty$.

ABSTRACT

Asymptotic analysis is an old subject that has applications in various fields of pure and applied mathematics, physics, and engineering. Asymptotic techniques are used to approximate complicated integral expressions resulting from various analytical transformation. Also, the solutions of some differential equations are calculated with greater precision using asymptotic techniques. An important feature of the theory of asymptotic expansions is that it plays an important role with experience and intuition in solving particular problems linked to nature. The objective of this study is to present approximations of this theory using generalized functions. The theory of generalized functions is another important area within mathematics, in which applications have been found for physics and engineering. Various studies have found a relationship between asymptotic techniques and distribution theory. The research is aimed at knowing in which distribution spaces such as $E^{\wedge}(\mathbb{R})$, $P^{\wedge}(\mathbb{R})$, $O_{\gamma^{\wedge}}(\mathbb{R})$. The expansion is valid. The momentum technique of asymptotic expansion is valid for many varieties of nuclei, such as fast-decaying and rapidly oscillating generalized functions. The asymptotic expansion also provides expansions of many integrals and series. Some series can be both convergent and asymptotic; however, there are divergent series that are asymptotic, which is why asymptotic series are referred to as divergent series. Rapidly decaying distributions at infinity are of fundamental importance in the study of generalized asymptotic expansions of functions. These expansions immediately give rise to the classical development of various integrals and series. The moment of the asymptotic expansion is referred to the expansion of the distributional kernels of the type $f(\lambda x)$ as $\lambda \rightarrow \infty$.

INTRODUCCIÓN

El análisis asintótico es una antigua materia que tiene aplicaciones en varios campos de la matemática pura y aplicada, en física e ingeniería. Las técnicas asintóticas son usadas para aproximar expresiones integrales complicadas que resultan de distintas transformaciones en el análisis.

También las soluciones de algunas ecuaciones diferenciales son calculadas con mayor precisión usando técnicas asintóticas. Una característica importante en la teoría de expansiones asintóticas es que juega un papel importante con la experiencia y la intuición al resolver problemas particulares vinculados con la naturaleza.

El objetivo de este estudio es desarrollar un marco teórico unificado que integre el uso de funciones generalizadas, técnicas de desarrollo asintótico y expansiones distribucionales en la resolución de ecuaciones, derivadas e integrales usando funciones generalizadas.

La teoría de funciones generalizadas es otra área importante dentro de la matemática, en la cual se han encontrado aplicaciones para la física e ingeniería. Recientemente se ha encontrado la relación entre las técnicas asintóticas y la teoría de distribuciones, las cuales aparecen en detalle.

MÉTODOLOGIA

En este apartado se presenta el desarrollo de las diferentes demostraciones aplicando métodos de integración para determinar la veracidad de los teoremas plateada y relacionar con las funciones generalizadas.

También se mostrará la dependencia de los teoremas, proposiciones y definiciones en las funciones generalizadas.

La metodología empleada en este trabajo siguió las siguientes etapas:

- Revisión del estado del arte sobre la teoría de las funciones generalizadas y de la teoría distribucional de desarrollo asintóticos, la cual consistió en analizar la metodología y resultados obtenidos en diversos artículos publicados en revistas indexadas de matemática pura y aplicada.
- Esto permitió obtener una visión general sobre las diferentes variantes existentes sobre la teoría de distribuciones. Se estudiaron múltiples procedimientos matemáticos de la teoría distribucional de desarrollo asintóticos, así como sus diferentes aplicaciones a la teoría de las funciones generalizadas.
- Generación de diversos desarrollos asintóticos de diferentes series funcionales divergentes.

FUNCIONES GENERALIZADAS

Definiciones Básicas

Definición 1.1 El espacio D de funciones de pruebas consiste en todas las funciones de valores complejos $\varphi(t)$ que son infinitamente diferenciable y a soporte compacto.

Definición 1.2 El soporte de una función continua $\varphi(t)$ es la clausura del conjunto donde $\varphi(t) \neq 0$. Los puntos del soporte de una función generalizada son llamados puntos esenciales.

Definición 1.3 Una sucesión de funciones de pruebas $\{\phi_n\}$ convergen en D si:

1. $\phi_n(x) \in D$
2. El soporte de cada $\phi_n(x)$ está contenido en algún dominio fijo K independiente de n .
3. La sucesión $\{\phi_n^k(x)\}$ converge uniformemente para $-\infty < x < \infty$ y k es un entero positivo fijo.

Observación 1.4 El hecho de que $\phi_n^k(x)$ converga uniformemente para cada k , afirma que $\phi_n^k(x)$ es continua y es el límite de $\{\phi_n^k(x)\}$, por tanto, D es un espacio completo.

Definición 1.5 Una funcional f lineal continua del espacio D , es una función generalizada. El espacio de todas las funciones generalizada se denotará por D' . D' es el dual o conjugado del espacio D .

Esa funcional debe satisfacer:

1. Linealidad:

$$\langle f, \alpha\phi_1 + \beta\phi_2 \rangle = \alpha\langle f, \phi_1 \rangle + \beta\langle f, \phi_2 \rangle$$

2. Continuidad:

$$\{\phi_n^k(x)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow \phi(x) \in D \text{ entonces } \{\langle f, \phi_n^k \rangle\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow \langle f, \phi(x) \rangle$$

El valor de f en la función de prueba ϕ se denota por:

$$\langle f, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)dx$$

Las distribuciones más simples están dadas por funciones localmente integrable, es decir, si f es una función definida en U (conjunto abierto de R^n), entonces es localmente integrable, por ejemplo, satisface $\int_K |f(x)| dx < \infty$ para cada compacto $K \subseteq U$, entonces podemos construir una distribución en U por la fórmula:

$$\langle f, \phi \rangle = \int_U f(x) \phi(x) dx$$

La cuál está bien definida en $D(U)$ debido a que la integral es evaluada sobre el soporte de $\phi(x)$ que es compacto y la continuidad sigue del hecho de que si $\{\phi_\eta\} \rightarrow 0$ en D entonces existe un compacto fijo K con $\text{sopp } \phi_\eta \subseteq K$ para $\eta \geq \eta_0$ y entonces,

$$|\int_U f(x) \phi_\eta(x) dx| \leq \int_K |f(x)| \max\{|\phi_\eta| : x \in U\} \rightarrow 0$$

debido a la convergencia uniforme de $\{\phi_\eta\} \rightarrow 0$

Ejemplo 1.6 Si $y \in U$, la funcional delta de Dirac en y , es la distribución $\delta(x-y)$ dada por:

$$\langle \delta(x-y), \phi(x) \rangle = \phi(y)$$

Donde la evaluación es con respecto a x donde y es un elemento fijo en U .

Observación 1.7 Las distribuciones que se obtienen de una función localmente integrable son llamadas distribuciones regulares, en casos contrarios, son distribuciones singulares.

OPERACIONES CON FUNCIONES GENERALIZADAS

Sean f, g funciones generalizadas, $\alpha \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^n$, $\phi \in D$

1. Suma:

$$\langle f+g, \phi \rangle = \langle f, \phi \rangle + \langle g, \phi \rangle$$

2. Producto de una distribución por una constante:

$$\langle \alpha f, \phi \rangle = \langle f, \alpha \phi \rangle$$

3. Traslación:

$$\langle f(t-x), \phi(x) \rangle = \langle f(t), \phi(t+x) \rangle$$

4. Trasposición:

$$\langle f(-t), \phi(t) \rangle = \langle f(t), \phi(t) \rangle$$

5. Multiplicación de la variable independiente por una constante positiva:

6. Si f, g son localmente integrables entonces, $\langle fg, \phi \rangle = \int f(t)g(t)\phi(t)dt$

Proposición 1.8 Sea φ una función infinitamente diferenciable, f una función generalizada y ϕ una función de prueba del espacio D , entonces:

$$\langle \varphi f, \phi \rangle = \langle f, \varphi \phi \rangle = \int \llbracket f(x)[\varphi(x)\phi(x)] dx = \int \llbracket \varphi(x)f(x) \rrbracket \phi(x) dx$$

Demostración:

Para cada $\phi \in D$, $\varphi \phi \in D$ y $\varphi \phi$ es cero cuando ϕ es cero, esto significa que $\varphi \phi \in D$

Sean ϕ_1 y $\phi_2 \in D$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$;

$$\langle \varphi f, \alpha \phi_1 + \beta \phi_2 \rangle = \langle f, \alpha \varphi \phi_1 + \beta \varphi \phi_2 \rangle$$

$$= \langle f, \alpha \varphi \phi_1 \rangle + \langle f, \beta \varphi \phi_2 \rangle$$

$$= \alpha \langle \varphi f, \phi_1 \rangle + \beta \langle \varphi f, \phi_2 \rangle$$

Sea $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 0$ entonces, hay que probar que $\{\varphi\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} |\varphi\phi_n - \varphi\phi_k| &= |\varphi(\phi_n - \phi_k)| \\ &= |\varphi||\phi_n - \phi_k| \\ &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ k \rightarrow \infty}} |\varphi||\phi_n - \phi_k| = 0 \end{aligned}$$

De aquí se deduce

$$\langle \varphi f, \phi_n \rangle = \langle f, \varphi\phi_n \rangle \rightarrow 0$$

Por tanto φf es una funcional lineal continua.

Definición 1.9 Una sucesión de funciones generalizadas $\{f_n\}$ converge en D' , si para cada $\phi \in D$, la sucesión numérica $\langle f_n, \phi \rangle$ converge.

Teorema 1.10 Sea $\{f_n(x)\}$ una sucesión de funciones localmente integrable que convergen puntualmente en casi todo punto a la función $f(x)$ y $|f_n(x)| \leq g(x)$, $g(x)$ es una función localmente integrable, entonces $f(x)$ es localmente integrable en la correspondiente sucesión de funciones generalizadas $\{f_n\}_{n \rightarrow \infty} \rightarrow f$ en D'

Demostración:

Por el teorema de la convergencia mayorada de Lebesgue se asegura que $f(x)$ es localmente integrable, también para una función fija $\phi \in D$, la sucesión $\{f_n \phi\} \rightarrow f\phi$ y todo elemento de esta sucesión es cero fuera de un compacto y entonces es integrable sobre R^n ; por teorema general de convergencia de Lebesgue se obtiene:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle f_k, \phi \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{R^n} f_k(x) \phi(x) dx = \int_{R^n} f(x) \phi(x) dx = \langle f, \phi \rangle$$

Observación 1.11

1) El teorema anterior es válido si la sucesión $\{f_n\}$ de funciones localmente integrable convergen uniformemente en un dominio acotado de R^n a la función $f(x)$.

2) D es un subespacio de D' .

3) La convergencia en D implica convergencia en D' .

4) La operación de pasaje al límite es lineal, es decir, si $f = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ o es una función infinitamente diferenciable entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha f_k = \alpha \lim_{k \rightarrow \infty} f_k = \alpha f$

5) Toda funcional singular es el límite de una sucesión de funcionales regulares.

6) Toda función generalizada es el límite de funciones generalizadas concentrada en conjuntos compactos.

DIFERENCIACION E INTEGRACION DE FUNCIONES GENERALIZADAS

Primeramente, consideraremos una función ordinaria de una variable. Sea $f(x)$ una función continua con primera derivada continua (en el sentido usual) y consideremos el funcional:

$$\langle f, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \phi(x) dx$$

Integrando por parte, se obtiene:

$$\langle f, \phi \rangle = f(x)\phi(x)|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi'(x) dx = \langle f, -\phi' \rangle$$

usaremos esta ecuación para definir la derivada de una función generalizada

Definición 1.12 Sea f una funcional lineal continua en D , entonces la funcional g definida por:

$$\langle g, \phi \rangle = \langle f, [-\phi]' \rangle$$

es llamada la derivada de f y es denotada por $f' \circ \frac{df}{dx}$, entonces,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) \phi(x) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \phi'(x) dx$$

Para mostrar la consistencia de esta definición, se debe probar que g es una funcional lineal continua en D .

$$\begin{aligned}
 \langle g, \alpha\phi_1 + \beta\phi_2 \rangle &= \langle g, \alpha\phi_1 \rangle + \langle g, \beta\phi_2 \rangle \\
 &= \alpha\langle g, \phi_1 \rangle + \beta\langle g, \phi_2 \rangle \\
 &= \alpha\langle f, -\phi'_1 \rangle + \beta\langle f, -\phi'_2 \rangle \\
 &= \langle f, -\alpha\phi'_1 \rangle + \langle f, -\beta\phi'_2 \rangle \\
 &= \langle f, -\alpha\phi'_1 - \beta\phi'_2 \rangle \\
 &= \langle g, \alpha\phi_1 + \beta\phi_2 \rangle
 \end{aligned}$$

Esto muestra que g es lineal, para ver la continuidad, haremos:

Sea una sucesión de funciones $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 0$ en D , de acuerdo a la definición de convergencia, la sucesión $\{-\phi'_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 0$ en D . El hecho de que f es continua implica que:

$$\langle g, \phi_n \rangle = \langle f, \phi'_n \rangle \rightarrow 0$$

Ejemplo 1.13 Sea $H(x)$ la función de Heaviside, definida por

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

entonces, su primera derivada es:

$$\begin{aligned}
 \langle H'(x), \phi(x) \rangle &= -\langle H(x), \phi'(x) \rangle \\
 &= -\int_0^{\infty} \phi'(x) dx = \phi(0)
 \end{aligned}$$

en conclusión, tenemos que:

$$H'(x) = \delta(x)$$

Definición 1.14 La derivada parcial de primer orden $\frac{\partial f}{\partial t_i} (i = 1, 2, \dots, n)$ de una función generalizada f definida sobre R^n son las funcionales en D dada por:

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial t_i}, \phi \right\rangle = \left\langle f, -\frac{\partial \phi}{\partial t_i} \right\rangle \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \phi \in D$$

Proposición 1.15 La derivada parcial de primer orden de una función generalizada es también una función generalizada.

Demostración:

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial f}{\partial t_i}, \alpha \phi_1 + \beta \phi_2 \right\rangle &= \left\langle f, -\alpha \frac{\partial \phi_1}{\partial t_i} - \beta \frac{\partial \phi_2}{\partial t_i} \right\rangle \\
&= \left\langle f, -\alpha \frac{\partial \phi_1}{\partial t_i} \right\rangle + \left\langle f, -\beta \frac{\partial \phi_2}{\partial t_i} \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\partial f}{\partial t_i}, \alpha \phi_1 \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial t_i}, \beta \phi_2 \right\rangle
\end{aligned}$$

Sea $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 0$ en D , esto significa que $\left\{ \frac{\partial \phi_n}{\partial t_i} \right\}_{n \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ en D , si f es continua se tiene:

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial t_i}, \phi_n \right\rangle \leq \left\langle f - \frac{\partial \phi_n}{\partial t_i} \right\rangle_{n \rightarrow \infty} \rightarrow 0$$

Proposición 1.16 Las derivadas mixtas de funciones generalizadas son independientes del orden de diferenciación, es decir,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial t_j \partial t_i}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j}, \phi \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial t_j} - \frac{\partial \phi}{\partial t_i} \right\rangle \\
&= \left\langle f, \frac{\partial^2 f}{\partial t_j \partial t_i} \right\rangle \\
&= \left\langle f, \frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j} \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\partial f}{\partial t_i}, -\frac{\partial \phi}{\partial t_j} \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial t_j \partial t_i}, \phi \right\rangle
\end{aligned}$$

Proposición 1.17 Sea φ una función infinitamente diferenciable y f una función generalizada, entonces:

$$\frac{\partial}{\partial t_i}(\varphi f) = \varphi \frac{\partial f}{\partial t_i} + f \frac{\partial \varphi}{\partial t_i}$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \langle \frac{\partial}{\partial t_i}(\varphi f), \phi \rangle &= \langle \varphi f, -\frac{\partial}{\partial t_i} \phi \rangle \\ &= -\langle f, \varphi \frac{\partial}{\partial t_i} \phi \rangle \\ &= -\langle f, \frac{\partial}{\partial t_i}(\varphi \phi) - \frac{\partial \varphi}{\partial t_i}(\phi) \rangle \\ &= -\langle f, \frac{\partial}{\partial t_i}(\varphi \phi) \rangle + \langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial t_i}(\phi) \rangle \\ &= \langle \frac{\partial f}{\partial t_i}, \varphi \phi \rangle + \langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} f, \phi \rangle \\ &= \langle \varphi \frac{\partial f}{\partial t_i}, \phi \rangle + \langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} f, \phi \rangle \end{aligned}$$

Definición 1.18 Sea $D^k = \prod_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial t_i} \right)^{k_i}$ entonces $\langle D^k f, \phi \rangle = \langle f, (-1)^k D^k \phi \rangle$

Teorema 1.19 La diferenciación es una operación lineal continua en el espacio D' , en el siguiente sentido:

1. Linealidad: Sean f, g funciones generalizadas y $\alpha \in \mathbb{C}$

$$D^k(f+g) = D^k f + D^k g$$

$$D^k(\alpha f) = \alpha D^k f$$

2. Continuidad: La sucesión $\{f_n\}_{n \rightarrow \infty} f$ en D y $\{D^k f_n\}_{n \rightarrow \infty} D^k$ en D' .

Demostración:

$$\begin{aligned} \langle D^k(f+g), \phi \rangle &= \langle f+g, (-1)^k D^k \phi \rangle \\ &= \langle f, (-1)^k D^k \phi \rangle + \langle g, (-1)^k D^k \phi \rangle \\ &= \langle D^k f, \phi \rangle + \langle D^k g, \phi \rangle \end{aligned}$$

Sea $\phi \in D$, entonces $D^k \phi \in D$.

$$\langle D^k f_n, \phi \rangle = \langle f_n, (-1)^k D^k \phi \rangle \rightarrow \langle f, (-1)^k D^k \phi \rangle = \langle D^k f, \phi \rangle$$

Observación 1.20

- 1) Toda función generalizada tiene derivada de todo orden.
- 2) La independencia del orden de diferenciación de las funciones generalizadas con derivadas mixtas, constituye un fenómeno de mayor alcance que el que se efectúa en el análisis clásico.
- 3) Toda función localmente integrable tiene derivada de todo orden en el sentido de funciones generalizadas.
- 4) La derivada ordinaria de una función f , no tiene por qué coincidir con la derivada en el sentido de funciones generalizadas.

CONVOLUCION DE FUNCIONES GENERALIZADAS

Sean f, g son funciones absolutamente integrables y $h(x)=f(x)*g(x)$ es su convolución, entonces:

$$\begin{aligned}\langle h(x), \phi(x) \rangle &= \int h(x) \phi(x) dx = \int dx \int f(y) g(t-y) \phi(x) dy \\ &= \iint f(x) g(y) \phi(t-y) \phi(x) dy\end{aligned}$$

Definición 1.21 Sean f, g funciones generalizadas, su convolución definida por:

$\langle f*g, \phi \rangle = \langle f(x) \times g(y), \phi(x+y) \rangle$ tiene sentido, si satisface al menos una de las dos condiciones:

- 1) f o g tiene soporte acotado.
- 2) En $\mathbb{R}^1$, el soporte de f y g están acotado en el mismo lado.

$$(f=0 \text{ para } x < a \text{ y } g=0 \text{ para } y < b)$$

Demostración**Caso 1:**

Supongamos que f tiene soporte acotado y g una funcional.

$$\begin{aligned}\langle f*g, \phi \rangle &= \langle f(x) \times g(y), \phi(x+y) \rangle \\ &= \langle g(y), (f(x), \phi(x+y)) \rangle\end{aligned}\quad (1)$$

$\langle (f(x), \phi(x+y)) \rangle$ es una función infinitamente diferenciable que se anula para $|y| \rightarrow \infty$, esto implica que el soporte de $f(x)$ y $\phi(x+y)$ no se intersecan, entonces este soporte está en Y_m (Espacio de funciones de pruebas de m variables independientes $y_1, y_2, \dots, y_m$) y por tanto $g(y)$ tiene soporte acotado y se puede aplicar al funcional $\langle (f(x), \phi(x+y)) \rangle$ que en general no tiene soporte acotado.

Caso 2:

Asumamos que los soportes de f, g están acotados a la izquierda. $\langle (f(x), \phi(x+y)) \rangle$ es una función infinitamente diferenciable que se anula para $|y| \rightarrow \infty$, esto implica que el soporte de $f(x)$ y $\phi(x+y)$ no se intersecan, entonces para cada y la función $\langle (f(x), \phi(x+y)) \rangle$ se anula y su soporte está acotado a la derecha, pero el de $g(y)$ está acotado a la izquierda, entonces, la intersección de los soportes está acotado y por tanto la expresión (1) simbólica tiene sentido.

Proposición 1.22 Sean f, g funciones generalizadas, entonces $f^*g = g^*f$

Demostración:

$$\begin{aligned} \langle f^*g, \phi \rangle &= \langle f(x) \times g(y), \phi(x+y) \rangle \\ &= \langle g(y) \times f(x), \phi(x+y) \rangle \\ &= \langle g(y), (\times f(x), \phi(x+y)) \rangle \\ &= \langle g^*f, \phi \rangle \end{aligned}$$

Proposición 1.23 Sean f, g funciones generalizadas. El soporte de f^*g es la suma de los soportes de f y g .

Demostración:

Sea Ω el complemento de $\Omega_f + \Omega_g$ entonces Ω es abierto.

$$\langle f^*g, \phi \rangle = \langle f(x) \times g(y), \phi(x+y) \rangle = 0$$

Cuando el soporte $\phi(x+y)$ está contenido en Ω . El soporte de $f(x) \times g(y)$ es el conjunto cerrado $\Omega_f \times \Omega_g$ si $(x, y) \in \Omega_f \times \Omega_g$, $x+y \in \Omega_f + \Omega_g$, es decir, el soporte $\phi(x+y) \in \Omega$ que no se intersecan con $\Omega_f + \Omega_g$ entonces el soporte de $\phi(x+y)$ esta definidos en un conjunto $x+y \in \Omega$, por tanto, el soporte de $\phi(x+y)$ es el conjunto no nulo de $f(x) \times g(y)$.

Proposición 1.24 Sean f, g funciones generalizadas, entonces

$$\begin{aligned} D(f * g) &= Df * g \\ &= f * Dg \end{aligned}$$

Demostración:

Sea

$$\frac{d\phi(x+y)}{d(x+y)} = \frac{\partial \phi(x+y)}{\partial y} \quad \text{para } \phi \in D$$

$$\begin{aligned} \langle D(f * g), \phi \rangle &= \langle f * g, -\frac{d\phi}{dx} \rangle \\ &= \langle f(x) \times g(y), -\frac{d\phi}{dx} \rangle \\ &= \langle f(x), \left(g(y), -\frac{d\phi(x+y)}{d(x+y)} \right) \rangle \\ &= \langle f(x), \left(\frac{dg(y)}{dy}, \phi(x+y) \right) \rangle \\ &= \langle f(x) * \left(\frac{dg(y)}{dy}, \phi(x+y) \right) \rangle \end{aligned}$$

Por el hecho de que la convolución es conmutativa se verifica que:

$$Df * g = f * Dg$$

Proposición 1.25 Sean f, g funciones generalizadas, entonces

$$h(t-a) = f(t-a) * g(t) = f(t) * g(t-a)$$

Demostración:

Sea $\phi \in D$, entonces

$$\begin{aligned} \langle h(t-a), \phi(t) \rangle &= \langle h(t), \phi(t+a) \rangle \\ &= \langle f(t) * g(t), \phi(t+a) \rangle \\ &= \langle f(t) \times g(x), \phi(t+x+a) \rangle \\ &= \langle f(t), g(x), \phi(t+x+a) \rangle \\ &= \langle f(t), (g(x-a), \phi(t+x)) \rangle \\ &= \langle f(t) * g(x-a), \phi(t+x) \rangle \end{aligned}$$

Donde usando la conmutatividad se completa la demostración.

Ejemplo 1.26

$$\delta(t-a)*f(t)=f(t-a)$$

más generalmente obtenemos:

$$\delta^{(m)}(t-a)*f(t)=f^{(m)}(t-a)$$

Porque para cualquier $\phi \in D$ tenemos:

$$\begin{aligned} \langle \delta^{(m)}(t-a)*f(t), \phi(t) \rangle &= \langle f(t), \langle \delta^{(m)}(\tau-a), \phi(t+\tau) \rangle \rangle \\ &= \langle f(t), \langle \delta^{(m)}(\tau), \phi(t+\tau+a) \rangle \rangle \\ &= \langle f(t), (-1)^m \phi^{(m)}(t+a) \rangle \\ &= \langle f^{(m)}(t), \phi(t+a) \rangle \\ &= \langle f^{(m)}(t-a), \phi(t) \rangle \end{aligned}$$

Observación 1.27

1) El producto directo de funciones generalizadas es también una función generalizada.

2) Si f, g son funciones generalizada sobre R^1 , entonces $f*g$ es también una distribución generalizada sobre R^1 .

3) El proceso de convolución no es en general asociativo (a menos que se asuma que los soportes de dos de las tres funcionales estén acotados a ambos lados o que los tres estén acotados al mismo lado)

$$4) \quad \frac{d^m}{dt^m} (f * g) = \frac{d^p f}{dt^p} * \frac{d^q g}{dt^q} \text{ con } p + q = m, p, q = 0, 1, 2, 3, \dots$$

5) El producto directo es conmutativo y asociativo.

Teorema 1.28 (Regularización de una Distribución)

Sea f una función generalizada, $\phi \in D$. Entonces $h=f*\phi$ es una función ordinaria dada por:

1) $h(t)=(f(x), \phi(t-x))$ y si $h(t)$ es infinitamente derivable.

$$2) \quad \frac{d^k}{dt^k} h(t) = \langle f(x), \frac{d^k}{dt^k} \phi(t-x) \rangle$$

Demostración:

$(f(x), \phi(t-x))$ es una función infinitamente derivable tal que:

$$\frac{d^k}{dt^k} \langle f(x), \phi(t-x) \rangle = \langle f(x), \frac{d^k}{dt^k} \phi(t-x) \rangle$$

Por tanto, si (1) es válido entonces (2) también lo es.

Sea θ una función arbitraria de D , entonces

$$\begin{aligned} \langle h * \theta \rangle &= \langle f(x) * \phi(y), \theta(x+y) \rangle \\ &= \langle f(x) \times \phi(y), \theta(x+y) \rangle \\ &= \langle f(x), (\phi(y), \theta(x+y)) \rangle \\ &= \langle f(x), (\theta(y), \phi(y-x)) \rangle \\ &= \langle f(x) \times \theta(y), \phi(y-x) \rangle \end{aligned}$$

Ahora el soporte de $f(x) \times \phi(y)$ con $\theta(y-x)$ es acotado y por la conmutatividad del producto directo, se obtiene:

$$\begin{aligned} \langle h * \theta \rangle &= \langle \theta(y) \times f(x), \phi(y-x) \rangle \\ &= \langle \theta(y) \times f(x), \phi(y-x) \rangle \\ &= \langle f(x), \phi(y-x), \theta(y) \rangle \end{aligned}$$

CONCLUSIONES

Las funciones generalizadas son una herramienta poderosa en matemáticas y física, ya que permiten extender el concepto de funciones más allá de las definiciones tradicionales. Estas funciones, que incluyen distribuciones como la delta de Dirac y la función escalón de Heaviside, son fundamentales para el análisis de sistemas en diversas áreas, como la teoría de señales y la mecánica cuántica.

En resumen, las funciones generalizadas nos ofrecen un marco flexible y robusto para abordar problemas complejos, facilitando la resolución de ecuaciones diferenciales y la representación de fenómenos físicos de manera más efectiva.

Las funciones generalizadas, al integrarse con el análisis de funciones complejas, amplían significativamente nuestras herramientas matemáticas. En este contexto, las funciones generalizadas permiten tratar singularidades y

comportamientos no convencionales de funciones complejas, facilitando el estudio de problemas en teoría de entornos y en la resolución de ecuaciones diferenciales complejas.

Además, conceptos como las distribuciones y las transformadas de Fourier se vuelven esenciales para entender fenómenos en física e ingeniería, donde las funciones complejas juegan un papel crucial.

Un ejemplo de las funciones generalizadas es en el análisis de algún circuito eléctrico al que se le somete una tensión muy elevada en un corto lapso de tiempo, o un sistema mecánico al que se le aplica una fuerza externa de gran magnitud y la cual solo actúa en un pequeño instante en el tiempo.

En conclusión, la combinación de funciones generalizadas y funciones complejas no solo enriquece el análisis matemático, sino que también proporciona un enfoque más profundo y versátil para abordar problemas en diversas disciplinas.

BIBLIOGRAFIA

Estrada, R., & Kanwal, R. P. (1992). The asymptotic expansion of some multidimensional generalized functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 163(2), 264–283.

Kanwal, R. P. (1983). *Generalized functions: Theory and technique*. Academic Press.

Schwartz, L. (1966). *Théorie des distributions*. Herman.

Vladimirov, V. S., Drozhinov, Y. N., & Zavalov, B. I. (1986). *Multidimensional Tauberian theorems for generalized functions*. Nauka.