



Acerca del Orden de Convergencia de las Reglas de Integración del Trapecio y Simpson para Cierta Clase de Funciones No Diferenciables

On the Order of Convergence of the Trapezoidal and Simpson's Rule for a Certain Class of Non Differentiable Functions

P. MADRID¹

Recibido: 2 de febrero de 2023 / Aceptado: 11 de mayo de 2023

¹Departamento de Matemática, Centro
Universitario Regional del Centro, Universidad
Nacional Autónoma de Honduras.
pedro.madrid@unah.edu.hn

RESUMEN

En el estudio de la teoría de integración numérica es bien conocido que el orden de convergencia clásico de la regla del trapecio es dos y se enuncia para funciones con segunda derivada continua, mientras que para la regla de Simpson el orden de convergencia clásico es cuatro y se cumple para funciones con cuarta derivada continua. En este trabajo se estudia cierta clase de funciones que no cumplen los requisitos de diferenciabilidad que exigen las dos reglas de integración numéricas antes mencionadas y se demuestra que en estos casos se puede obtener un orden de convergencia fraccionario, pero menor o igual al clásico. También Se presentan experimentos numéricos que validan la teoría.

ABSTRACT

It's well known from numerical integration theory that the classical order of convergence of the trapezoidal rule is two, for Simpson's rule is four and they are formulated for functions that have second and fourth continuous derivative, respectively. In this work a certain class of functions that do not satisfy the smoothness requirements mentioned above are studied and it's proved that the order of convergence can be fractional and at most the same as the classical order. Numerical experiments are shown in order to validate theoretical results.

PALABRAS CLAVES

Regla compuesta del trapecio, regla compuesta de Simpson, estimado de error, orden de convergencia fraccionario, fórmula generalizada de Faulhaber, integración numérica.

KEYWORDS

Composite trapezoidal rule, composite Simpson's rule, error estimate, fractional order of convergence, generalized Faulhaber's formula, numerical integration.

* Esta obra está bajo una licencia Creative Commons Reconocimiento - NoComercial 4.0 Internacional

* This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License.

I | INTRODUCCIÓN

El problema que consiste en evaluar una integral definida surge en muchas áreas del saber como ser la matemática, física, ingeniería, economía y otras. Suele ocurrir que las integrales definidas de interés de dichas aplicaciones no se pueden calcular de forma cerrada en términos de funciones elementales. Un ejemplo muy conocido es la integral gaussiana

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

utilizada para el cálculo de probabilidades (Conrad, 2005). Debido a esto surge la necesidad de aproximarlas de forma numérica. Para esto se han formulado varias técnicas, algunas de ellas son la regla compuesta del trapecio, la regla compuesta de Simpson, cuadratura Gaussiana y otras.

Cada regla de integración numérica genera un valor aproximado al valor exacto de la integral definida y por lo tanto existe un error absoluto asociado. Usualmente los errores exactos son desconocidos, así que lo mejor que se puede hacer es estimarlos. En la literatura estos estimados son muy conocidos (Kincaid, Kincaid, y Cheney, 2009; Süli y Mayers, 2003) y algo en común que tienen es que se requiere que la función a integrar sea diferenciable hasta cierto orden.

Para el caso de la regla compuesta del trapecio se requiere diferenciable hasta orden dos, mientras que la regla de Simpson requiere diferenciable hasta orden cuatro. Sin embargo la interpretación geométrica de estos métodos, en especial la de las reglas del trapecio y Simpson, sugieren que la diferenciable es muy exigente y no es necesaria para garantizar convergencia del método. Aparentemente la continuidad pueda ser suficiente para garantizar convergencia.

En este trabajo se demuestran estimados de error para las reglas compuestas del trapecio y Simpson cuando estas se aplican a cierta clase de funciones que no cumplen con el requisito de la diferenciable exigida en los estimados de error clásicos. Como consecuencia se observan reducciones en los órdenes de convergencia y hasta de tipo fraccionario los cuales se validan por medio de experimentos numéricos.

Es importante agregar que el presente trabajo no es el primero en estudiar estimados de error no clásicos, por ejemplo en (Dragomir y Mabizela, 1999) se demuestra en el teorema 4 que para funciones cuya primera derivada pertenece al espacio de Hölder $C^\alpha[a, b]$, con $\alpha \in (0, 1]$, el orden de convergencia de la regla del trapecio con particiones uniformes es $1 + \alpha$, mientras que en el teorema 6 se prueba un orden de convergencia igual a uno cuando la primera derivada es absolutamente continua y la segunda derivada pertenece a $L_p(a, b)$, con $1 < p < \infty$. Esta disminución del orden de convergencia clásico motiva al uso de otras reglas de integración numérica o a una modificación de la misma para acelerar la convergencia (Talvila y Wiersma, 2012).

El contenido de este artículo está distribuido de la siguiente manera: En la sección II se presentan la regla del trapecio y su estimado de error clásico, en la sección III se demuestra un estimado de error más general que el clásico para el caso de la regla del trapecio aplicada a $f(x) = x^\alpha$ con $0 < \alpha < 2$, mientras que en la sección IV se generalizan los mismos resultados a una clase más amplia de funciones no diferenciables. En la sección V se validan los resultados teóricos de las secciones III y IV por medio de experimentos numéricos. En la sección VI se hace un análisis similar al de las secciones III y IV pero con la regla de Simpson. Estos últimos resultados teóricos se validan en la sección VII por medio de experimentos numéricos y se finaliza este trabajo en la sección VIII dando una serie de conclusiones.

II | LA REGLA COMPUESTA DEL TRAPECIO

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. La integral definida $\int_a^b f(x)dx$ se puede aproximar mediante la regla compuesta del trapecio la cual se define como

$${}^b_a T_h[f] = \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)],$$

donde $n \in \mathbb{N}$ es el número de particiones del intervalo $[a, b]$, $h = (b - a)/n$ es el tamaño de la partición, $a = x_0$, $b = x_n$, $x_i = a + ih$, donde $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Si adicionalmente f tiene segunda derivada continua en $[a, b]$, propiedad que se representa por $f \in C^2([a, b])$, el error absoluto \mathcal{E}_T generado por esta regla es generalmente conocido como (Süli y Mayers, 2003), (Kincaid y cols., 2009)

$${}^b_a \mathcal{E}_T[f] := \left| \int_a^b f(x)dx - {}^b_a T_h[f] \right| \leq \frac{b-a}{12} M_2 h^2, \quad (1)$$

donde $M_2 = \max_{\xi \in [a, b]} \{|f''(\xi)|\}$. Puesto que la constante $\frac{b-a}{12} M_2$ no depende de h , solamente de f y el intervalo $[a, b]$, el error en la notación de Landau también se puede expresar como ${}^b_a \mathcal{E}_T[f] = O(h^2)$, cuando $h \rightarrow 0$. Finalmente, sin pérdida de generalidad, de ahora en adelante se va asumir que el intervalo de integración es $[0, b]$ gracias a el cambio de variable $u = \frac{b}{b-a}x - \frac{ab}{b-a}$.

III | LA REGLA DEL TRAPECIO APLICADA A LA FUNCIÓN POTENCIA

En esta sección se desarrolla una fórmula para ${}^b_0 \mathcal{E}_T[f]$, cuando f es de la forma $f(x) = x^\alpha$, donde $0 < \alpha < 2$, $\alpha \neq 1$, $x \in [0, b]$. Note que para estos valores de α se tiene que $f \notin C^2([0, b])$, así que el estimado (1) no aplica en este caso.

Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces $h = b/n$ y

$$\begin{aligned} \int_0^b x^\alpha dx - {}^b_0 T_h[x^\alpha] &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[\int_{kh}^{(k+1)h} x^\alpha dx - \frac{h}{2} [(kh)^\alpha + ((k+1)h)^\alpha] \right] \\ &= \frac{h^{1+\alpha}}{1+\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} [(k+1)^{1+\alpha} - k^{1+\alpha}] - \frac{h^{1+\alpha}}{2} \sum_{k=0}^{n-1} [k^\alpha + (k+1)^\alpha] \\ &= \frac{h^{1+\alpha}}{1+\alpha} n^{1+\alpha} - h^{1+\alpha} \sum_{k=1}^{n-1} k^\alpha - \frac{h^{1+\alpha}}{2} n^\alpha \\ &= \left[\frac{1}{1+\alpha} n^{1+\alpha} + \frac{1}{2} n^\alpha - \sum_{k=1}^n k^\alpha \right] h^{1+\alpha}. \end{aligned} \quad (2)$$

La fórmula anterior se puede simplificar gracias al interesante resultado publicado en (McGown y Parks, 2007; Schumacher, 2022):

$$\sum_{k=1}^n k^\alpha = \frac{1}{1+\alpha} n^{1+\alpha} + \frac{1}{2} n^\alpha + \frac{\alpha}{12} n^{\alpha-1} + \zeta(-\alpha) + O(n^{\alpha-3}), \quad (3)$$

cuando $n \rightarrow +\infty$. En la fórmula anterior, $\zeta(-\alpha)$ representa a la función zeta de Riemann extendida analíticamente (Ahlam y Stromberg, 2017) en $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ y evaluada en $-\alpha$. Sustituyendo (3) en (2) se obtiene

$$\int_0^b x^\alpha dx - {}_0^b\mathcal{T}_h[x^\alpha] = -\zeta(-\alpha)h^{1+\alpha} - \frac{\alpha}{12}n^{\alpha-1}h^{1+\alpha} + O(n^{\alpha-3}h^{1+\alpha}),$$

pero $n^{\alpha-3}h^{1+\alpha} = b^{\alpha-3}h^4$, $n^{\alpha-1}h^{1+\alpha} = b^{-1+\alpha}h^2$, entonces

$$\begin{aligned} \int_0^b x^\alpha dx - {}_0^b\mathcal{T}_h[x^\alpha] &= -\zeta(-\alpha)h^{1+\alpha} - \frac{\alpha}{12}b^{-1+\alpha}h^2 + O(h^4) \\ &= O\left(h^{\min\{1+\alpha, 2\}}\right), \end{aligned} \tag{4}$$

por lo tanto ${}_0^b\mathcal{E}_T[x^\alpha] = O\left(h^{\min\{1+\alpha, 2\}}\right)$. Con esto se demuestra que para el caso $0 < \alpha < 1$, la regla compuesta del trapecio tiene un orden de convergencia fraccionario. Cuando $1 < \alpha < 2$, el orden de convergencia es dos, el mismo orden que se presenta en (1), pero esta vez $f \notin C^2([0, b])$.

IV | LA REGLA DEL TRAPECIO PARA UNA FAMILIA MÁS AMPLIA DE FUNCIONES NO DIFERENCIABLES

En esta sección se considera la familia de funciones de la forma

$$f(x) = x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \tag{5}$$

donde $0 < \alpha < 2$, $\alpha \neq 1$, $c_n \in \mathbb{R}$ para $n = 0, 1, \dots$, $c_0 \neq 0$ y la serie de potencias converge para todo $x \in (-R, R)$, donde $R > b$. La idea que hay detrás de considerar esta familia de funciones es que para $x \approx 0$, $f(x) \approx c_0 x^\alpha$ y $f \in C^2((0, b))$, pero $f \notin C^2([0, b])$, precisamente las mismas propiedades que cumple la función $g(x) = x^\alpha$ en $[0, b]$. Se quiere probar que para esta familia de funciones se sigue cumpliendo ${}_0^b\mathcal{E}_T[f] = O\left(h^{\min\{1+\alpha, 2\}}\right)$. Para lograr esto es suficiente justificar que los términos $\{c_n x^{n+\alpha}\}$ de la suma infinita se pueden reagrupar sin afectar la convergencia de la serie y que la integral definida con la suma infinita se pueden intercambiar. En efecto, lo de reagrupar términos de la serie sin afectar su convergencia se sigue de que f es absolutamente convergente en $[0, b]$ y lo de intercambiar integración con la suma infinita se sigue de (Stein y Shakarchi, 2009)

$$\int_0^b \sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^{n+\alpha}| < b^\alpha \int_0^b \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| x^n < +\infty.$$

Después de aplicar las dos propiedades antes mencionadas a ${}_0^b\mathcal{E}_T[f]$ se obtiene

$$\begin{aligned} {}_0^b\mathcal{E}_T[f] &= \left({}_0^b\mathcal{E}_T[x^\alpha]\right) c_0 + \left({}_0^b\mathcal{E}_T[x^{1+\alpha}]\right) c_1 + \left({}_0^b\mathcal{E}_T[x^{2+\alpha}]\right) c_2 + \dots \\ &= \left(O\left(h^{\min\{1+\alpha, 2\}}\right)\right) c_0 + \left(O(h^2)\right) c_1 + \left(O(h^2)\right) c_2 + \dots \\ &= \left(O\left(h^{\min\{1+\alpha, 2\}}\right)\right), \end{aligned} \tag{6}$$

porque $c_0 \neq 0$.

n	h	${}^1_0\mathcal{E}_T[x^{6/5}]$
10^2	10^{-2}	7.8188×10^{-06}
10^3	10^{-3}	8.6238×10^{-08}
10^4	10^{-4}	9.1312×10^{-10}
10^5	10^{-5}	9.0625×10^{-12}

Tabla 1: Tabla de errores absolutos de la regla del trapecio aplicada a $f(x) = x^{6/5}$.

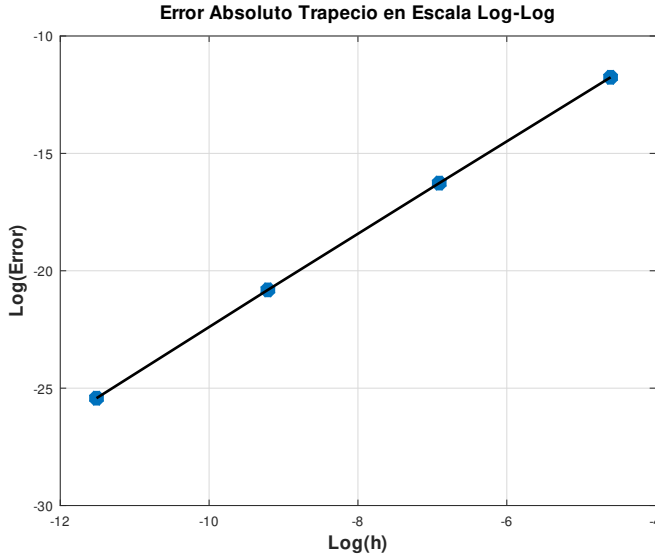


Figura 1: Error absoluto versus h en escala log – log para la regla del trapecio aplicada a $x^{6/5}$.

V | EXPERIMENTOS NUMÉRICOS PARA LA REGLA DEL TRAPECIO

En esta sección se realizan experimentos numéricos que ponen a prueba los estimados de error (4) y (6) y por lo tanto el posible orden de convergencia fraccionario.

1 | Experimento 1

En este experimento numérico se considera el intervalo de integración $[0, 1]$ y la función $f(x) = x^\alpha$ con $\alpha = 6/5$. El valor exacto de la integral es $5/11$. La regla del trapecio se aplica tomando $n = 10^2, 10^3, 10^4, 10^5$ particiones. El estimado de error (1) no es aplicable en este caso porque $f \notin C^2([0, 2])$, pero según (4) se espera que el orden de convergencia sea $\min\{1 + 6/5, 2\} = 2$. En efecto, en una escala log – log del error absoluto versus h se observa que el orden de convergencia es de 1.9783 aproximadamente, consistente con el dato teórico (4). Esto se ilustra en la Figura 1, mientras que en la Tabla 1 se muestran los errores absolutos.

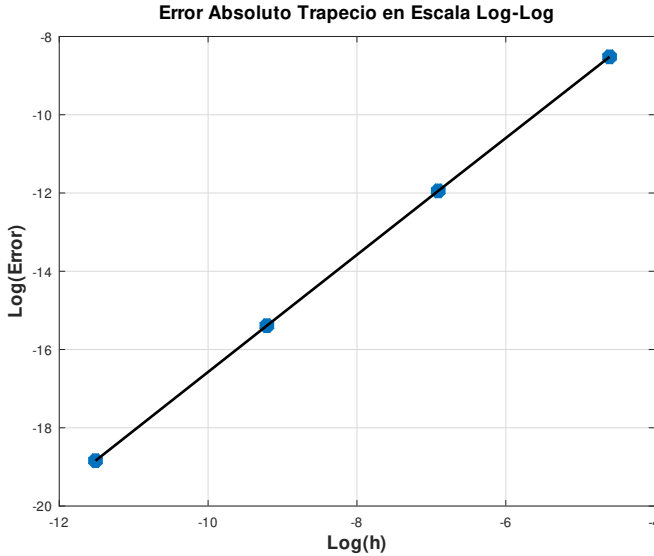


Figura 2: ${}^1_0E_T[f]$ vs h en escala log – log para la regla del trapecio aplicada a $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$.

2 | Experimento 2

En este experimento numérico se considera la función $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$ y el intervalo de integración $[0, 1]$. El valor exacto de la integral es $2\sqrt{e-1} - 2\arctan(\sqrt{e-1})$. Se observa en este caso que f se puede expresar en la forma $f(x) = x^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{e^x - 1}{x}}$, donde la función $g(x) = \sqrt{\frac{e^x - 1}{x}}$ se considera analítica en \mathbb{R} ya que

$$h(x) = \frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \dots,$$

es el cociente de dos funciones analíticas y $x = 0$ es la única discontinuidad de tipo removible. Como $h(x) > 0$ en todo \mathbb{R} , se concluye que $g(x) = e^{\frac{1}{2} \log h(x)}$ es analítica en \mathbb{R} , en particular en el intervalo $[0, 1]$, porque es la composición de funciones analíticas. Por lo tanto se puede expresar g como una serie de potencias $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ con $c_0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1 \neq 0$. Esto justifica que la función f es de la forma

(5), con $\alpha = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, según (6) se espera en este caso que la regla del trapecio tenga el orden de convergencia fraccionario $\min\{1 + 1/2, 2\} = 1.5$, menor al valor clásico (1). En efecto, tomando las particiones $n = 10^2, 10^3, 10^4, 10^5$, de la relación log – log del error absoluto versus h se puede apreciar un orden de convergencia aproximadamente igual a 1.4943, valor consistente con lo antes mencionado. Esto se puede observar en la Figura 2. Los errores absolutos se reportan en la Tabla 2.

n	h	${}_0^1\mathcal{E}_T[\sqrt{e^x - 1}]$
10^2	10^{-2}	1.9931×10^{-4}
10^3	10^{-3}	6.4877×10^{-6}
10^4	10^{-4}	2.0702×10^{-7}
10^5	10^{-5}	6.5656×10^{-9}

Tabla 2: Tabla de errores absolutos de la regla del trapecio aplicada a $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$.

VI | LA REGLA DE SIMPSON Y RESULTADOS SIMILARES AL TRAPECIO

En esta sección se enuncia la regla compuesta de Simpson y se obtiene un estimado de error para las funciones de la forma $f(x) = x^\alpha \sum_{n=0}^\infty c_n x^n$, con $0 < \alpha < 4$, $\alpha \notin \{1, 2, 3\}$, $c_n \in \mathbb{R}$ para $n = 0, 1, \dots$, $c_0 \neq 0$ y la serie de potencias convergente para todo $x \in (-R, R)$, donde $R > b$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ un número par de particiones de la forma $n = 2m$, con tamaño de partición $h = \frac{b}{n}$, $x_i = ih$, donde $i = 0, 1, 2, \dots, n$. La regla compuesta de Simpson intenta aproximar $\int_0^b f(x)dx$ y se define como

$${}_0^b S_h[f] = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)],$$

el error absoluto clásico está dado por (Kincaid y cols., 2009; Süli y Mayers, 2003)

$${}_0^b \mathcal{E}_S[f] := \left| \int_0^b f(x)dx - {}_0^b S_h[f] \right| \leq \frac{b}{2880} M_4 h^4, \tag{7}$$

donde $M_4 = \max_{\xi \in [0, b]} \left\{ \left| f^{(4)}(\xi) \right| \right\}$. Por lo tanto ${}_0^b \mathcal{E}_S[f] = O(h^4)$, cuando $h \rightarrow 0$. Esto indica que en general, no siempre, la regla de Simpson es más precisa que la regla del trapecio, pero para aplicar el estimado (7) se requiere que $f \in C^4([0, b])$, condición que no cumple la familia de funciones a estudiar.

El orden de convergencia para ${}_0^b \mathcal{E}_S[x^\alpha]$ y ${}_0^b \mathcal{E}_S[x^\alpha \sum_{n=0}^\infty c_n x^n]$ se obtiene de manera similar al caso de la regla compuesta del trapecio, excepto que en este caso el álgebra es un poco mas tediosa. Por esta razón solamente se describe de manera breve la deducción del estimado de error. Para el caso $f(x) = x^\alpha$ se puede probar que

$$\begin{aligned} \int_0^b x^\alpha dx - {}_0^b S_h[x^\alpha] &= -\frac{2}{3}(2 - 2^\alpha)\zeta(-\alpha)h^{1+\alpha} - \frac{1}{180}(\alpha - 2)(\alpha - 1)\alpha b^{\alpha-3}h^4 + O(h^6) \\ &= O\left(h^{\min\{1+\alpha, 4\}}\right), \end{aligned} \tag{8}$$

puesto que $\alpha \notin \{1, 2, 3\}$. El resultado (8) se obtiene nuevamente de la siguiente identidad interesante

n	h	${}_0^1\mathcal{E}_S[x^{23/10}]$
8	1.25×10^{-1}	1.2090×10^{-5}
80	1.25×10^{-2}	6.5461×10^{-9}
800	1.25×10^{-3}	3.3296×10^{-12}
8000	1.25×10^{-4}	1.9984×10^{-15}

Tabla 3: Tabla de errores absolutos de la regla de Simpson aplicada a $f(x) = x^{23/10}$.

que aparece en los artículos (McGown y Parks, 2007; Schumacher, 2022)

$$\sum_{k=1}^n k^\alpha = \frac{1}{1+\alpha} n^{1+\alpha} + \frac{1}{2} n^\alpha + \frac{\alpha}{12} n^{\alpha-1} - \frac{1}{720} (\alpha-2)(\alpha-1)\alpha n^{\alpha-3} + \zeta(-\alpha) + O(n^{\alpha-5}),$$

y de esta misma identidad se pueden obtener

$$\sum_{k=1}^{m-1} (2k)^\alpha = \frac{2^\alpha}{1+\alpha} m^{1+\alpha} - 2^{\alpha-1} m^\alpha + \frac{\alpha}{12} 2^\alpha m^{\alpha-1} - \frac{1}{720} (\alpha-2)(\alpha-1)\alpha 2^\alpha m^{\alpha-3} + 2^\alpha \zeta(-\alpha) + O(m^{\alpha-5}),$$

$$\sum_{k=1}^m (2k-1)^\alpha = \frac{2^\alpha}{1+\alpha} m^{1+\alpha} - \frac{\alpha}{12} 2^{\alpha-1} m^{\alpha-1} + \frac{7}{5760} (\alpha-2)(\alpha-1)\alpha 2^\alpha m^{\alpha-3} + (1-2^\alpha)\zeta(-\alpha) + O(m^{\alpha-5})$$

las cuales se aplican a

$${}_0^b\mathcal{S}_h[x^\alpha] = \frac{4}{3} h^{1+\alpha} \left[\sum_{k=1}^m (2k-1)^\alpha \right] + \frac{2}{3} h^{1+\alpha} \left[\sum_{k=1}^{m-1} (2k)^\alpha \right] + \frac{2^\alpha m^\alpha}{3} h^{1+\alpha},$$

y por lo tanto se obtiene (8). Finalmente, si se considera la familia de funciones mencionada al inicio de esta sección, se pueden aplicar los mismos argumentos de la sección IV y se llega a que

$${}_0^b\mathcal{E}_S[f] = O\left(h^{\min\{1+\alpha, 4\}}\right). \tag{9}$$

VII | EXPERIMENTOS NUMÉRICOS PARA LA REGLA DE SIMPSON

En esta sección se realizan experimentos numéricos que ponen a prueba los estimados de error y por lo tanto el posible orden de convergencia fraccionario mostrado en (8) y (9).

1 | Experimento 3

En este experimento numérico se considera el intervalo de integración $[0, 1]$ y la función $f(x) = x^\alpha$ con $\alpha = 23/10$. El valor exacto de la integral es $10/33$. La regla de Simpson se aplica tomando $n = 8, 80, 800, 8000$ particiones. El estimado de error (7) no es aplicable en este caso porque $f \notin C^4([0, 1])$, pero según (8) se espera que el orden de convergencia sea $\min\{1 + 23/10, 4\} = 3.3$. En efecto, en una escala log-log del error absoluto versus h se observa que el orden de convergencia es de 3.2639 aproximadamente, consistente con el dato teórico (8). Esto se ilustra en la Figura 3, mientras que en la Tabla 3 se muestran los errores absolutos.

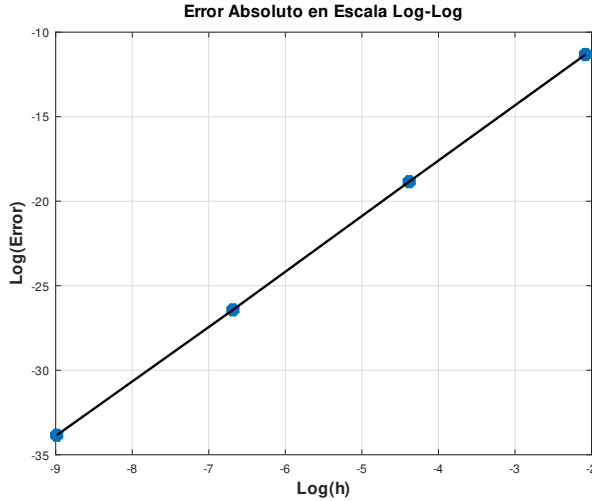


Figura 3: Error absoluto versus h en escala log – log para la regla de Simpson aplicada a $x^{23/10}$.

2 | Experimento 4

En este experimento numérico se considera la función $f(x) = [\sin(x)]^{1/10} \cos(x)$ y el intervalo de integración $[0, 1]$. El valor exacto de la integral es $\frac{10}{11} [\sin(1)]^{11/10}$. Se observa en este caso que f se puede expresar en la forma

$$f(x) = x^{1/10} \left[\frac{\sin(x)}{x} \right]^{1/10} \cos(x),$$

en donde la función $g(x) = \left[\frac{\sin(x)}{x} \right]^{1/10} \cos(x)$ se puede considerar analítica en $[0, 1]$ y esto se justifica

empleando los mismos argumentos de la subsección 2. Por lo tanto f es de la forma (5), con $\alpha = \frac{1}{2}$. El estimado de error clásico (7) no es aplicable en este caso porque f ni siquiera tiene primera derivada continua. Pero según (9) se espera que la regla de Simpson tenga el orden de convergencia fraccionario $\min\{1 + 1/10, 4\} = 1.1$, menor al valor clásico (7). En efecto, tomando las particiones $n = 8, 80, 800, 8000$, de la relación log – log del error absoluto versus h se puede apreciar un orden de convergencia aproximadamente igual a 1.1000, valor consistente con lo antes mencionado. Esto se observa en la Figura 4. Los errores absolutos se reportan en la Tabla 4.

VIII | CONCLUSIONES

Los estimados de error clásicos de las reglas compuestas del trapecio y Simpson requieren que la función a integrar tenga segunda y cuarta derivada continua, respectivamente. En este trabajo se observó que para cierta clase de funciones este requisito se puede eliminar. Las consecuencias son que el orden de convergencia puede ser fraccionario y menor a los resultados clásicos. Existen también casos en los que el orden de convergencia clásico se mantiene pero el requisito del orden de diferenciabilidad no se cumple. Por ejemplo, para la regla compuesta del trapecio un $1 < \alpha < 2$ implica convergencia de

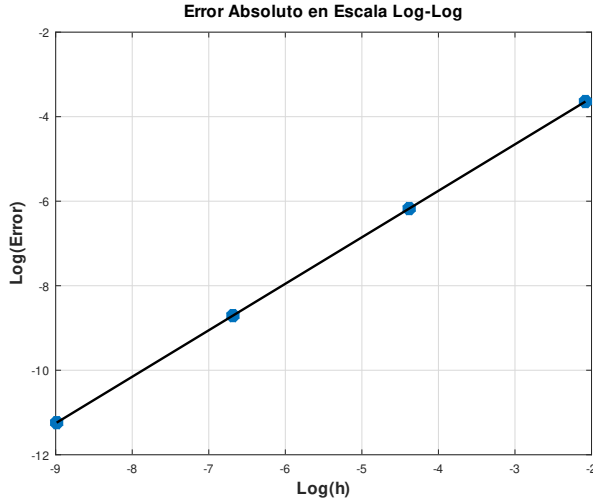


Figura 4: Escala log – log para el error absoluto de Simpson aplicado a $f(x) = \cos(x) [\sin(x)]^{1/10}$.

n	h	${}_0^1\mathcal{E}_S[f]$
8	1.25×10^{-1}	2.6209×10^{-2}
80	1.25×10^{-2}	2.0823×10^{-3}
800	1.25×10^{-3}	1.6540×10^{-4}
8000	1.25×10^{-4}	1.3138×10^{-5}

Tabla 4: Tabla de errores absolutos de la regla de Simpson aplicada a $f(x) = \cos(x) [\sin(x)]^{1/10}$.

orden dos, a pesar que la función no tenga segunda derivada continua. De manera similar, para la regla compuesta de Simpson, un $3 < \alpha < 4$ implica convergencia de orden 4, sin que la función tenga cuarta derivada continua. Se finaliza mencionando que estos resultados fueron posibles gracias a las fórmulas interesantes que aparecen en (McGown y Parks, 2007; Schumacher, 2022).

I Agradecimientos

El autor de este trabajo agradece al Profesor Paul Castillo, actualmente profesor de matemática de la Universidad de Puerto Rico en Mayagüez, por haberle sugerido explorar el problema de estimados de error para funciones no diferenciables. Esto ocurrió cuando el autor fue estudiante del Profesor Castillo durante el curso de análisis numérico.

I REFERENCIAS

Ahlam, A., y Stromberg, F. (2017). The riemann zeta function and its analytic continuation. *British Journal of Mathematics Computer Science*, 22(5), 1–47.

Conrad, B. (2005). Impossibility theorems for elementary integration. En *Academy colloquium series. clay mathematics institute, cambridge, ma*.

- Dragomir, S. S., y Mabizela, S. G. (1999). Some error estimates in the trapezoidal quadrature rule. *RGMIA research report collection*, 2(5).
- Kincaid, D., Kincaid, D. R., y Cheney, E. W. (2009). *Numerical analysis: mathematics of scientific computing* (Vol. 2). American Mathematical Soc.
- McGown, K. J., y Parks, H. R. (2007). The generalization of faulhaber's formula to sums of non-integral powers. *Journal of mathematical analysis and applications*, 330(1), 571–575.
- Schumacher, R. (2022). The generalization of faulhaber's formula to sums of arbitrary complex powers. *Journal of Integer Sequences*, 25(22.3.7).
- Stein, E. M., y Shakarchi, R. (2009). *Real analysis: measure theory, integration, and hilbert spaces*. Princeton University Press.
- Süli, E., y Mayers, D. F. (2003). *An introduction to numerical analysis*. Cambridge university press.
- Talvila, E., y Wiersma, M. (2012). Optimal error estimates for corrected trapezoidal rules. *Journal of Mathematical Inequalities*, 6(3).