

## Fundamentos y Aplicaciones de las Bases de Gröbner en la Resolución de Ecuaciones Polinomiales

*Fundamentals and Applications of Gröbner Bases in Solving Polynomial Equations*

Zayda Julissa Blandón-Chavarría<sup>1</sup>

Adriana Julieith Ortez-Peralta<sup>2</sup>

Cliffor Jerry Herrera-Castrillo<sup>3</sup>

### Resumen

Este artículo de revisión examina investigaciones sobre las bases de Gröbner aplicadas a sistemas de ecuaciones polinomiales, con el objetivo de presentar una revisión exhaustiva de sus aplicaciones en la resolución de estos sistemas. El estudio, basado en un enfoque cualitativo, abarca 24 citas seleccionadas de 30 investigaciones encontradas y utiliza Google Académico para la búsqueda, abordando temas como las bases de Gröbner, aprendizaje matemático, pensamiento computacional, álgebra, resolución de ecuaciones polinomiales, tecnología y educación matemática. Las nuevas tecnologías educativas en la enseñanza de las matemáticas van más allá de una simple computadora; sin embargo, esta sigue siendo una herramienta fundamental en el álgebra computacional. Las bases de Gröbner facilitan la resolución de ecuaciones polinomiales y son una herramienta esencial en álgebra informática y otras áreas, permitiendo resolver diversas dificultades algebraicas. Este artículo proporciona una visión sobre las bases de Gröbner aplicadas a sistemas de ecuaciones polinomiales, destacando aspectos teóricos y educativos clave para la comunidad académica.

<sup>1</sup> Profesora de Educación Media con mención en Matemáticas, Estudiante de la Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, Managua (UNAN-Managua), Centro Universitario Regional Estelí (CUR-Estelí). Email: zaydablandon2020@gmail.com, Orcid: <https://orcid.org/0009-0000-2589-1944>

High School Teacher with a major in Mathematics, Student at the National Autonomous University of Nicaragua, Managua (UNAN-Managua), Estelí Regional University Center (CUR-Estelí).

<sup>2</sup> Profesora de Educación Media con mención en Matemáticas, Estudiante de la Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, Managua (UNAN-Managua), Centro Universitario Regional Estelí (CUR-Estelí). Email: adrianaortez824@gmail.com, Orcid: <https://orcid.org/0009-0008-7060-4260>

High School Teacher with a major in Mathematics, Student at the National Autonomous University of Nicaragua, Managua (UNAN-Managua), Estelí Regional University Center (CUR-Estelí).

<sup>3</sup> Doctor en Matemática Aplicada, Responsable de Investigación e Innovación del Departamento de Ciencias de la Educación y Humanidades de la Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, Managua (UNAN-Managua), Centro Universitario Regional Estelí (CUR-Estelí). Email: cliffor.herrera@unan.edu.ni, Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-7663-2499>

PhD in Applied Mathematics, Head of Research and Innovation at the Department of Educational Sciences and Humanities at the National Autonomous University of Nicaragua, Managua (UNAN-Managua), Estelí Regional University Center (CUR-Estelí).

Recibido: 24/07/2024 - Aprobado: 24/01/2025

59 |

Blandón-Chavarría, Z. J., Ortez-Peralta, A. J., y Herrera-Castrillo, C. J. (2025). Fundamentos y Aplicaciones de las Bases de Gröbner en la Resolución de Ecuaciones Polinomiales. *Ciencia e Interculturalidad*, 34(2), 59–75. <https://doi.org/10.5377/rici.v34i2.20537>

Licencia Creative Commons

Atribución-NoComercial-NoDerivadas



**Palabras clave:** Álgebra, aprendizaje, bases de Gröbner, ecuaciones polinomiales, pensamiento computacional

## Abstract

This review article examines research on Gröbner bases applied to systems of polynomial equations, with the aim of presenting a comprehensive review of their applications in solving these systems. The study, based on a qualitative approach, covers 24 citations selected from 30 research found and uses Google Scholar for the search, addressing topics such as Gröbner bases, mathematical learning, computational thinking, algebra, polynomial equation solving, technology and mathematics education. New educational technologies in mathematics education go beyond a simple computer; however, the computer remains a fundamental tool in computer algebra. Gröbner bases facilitate the solution of polynomial equations and are an essential tool in computer algebra and other areas, allowing to solve various algebraic difficulties. This article provides an overview of Gröbner bases applied to systems of polynomial equations, highlighting key theoretical and educational aspects for the academic community.

**Keywords:** Algebra, learning, Gröbner Bases, polynomial equations, computational thinking

## I. INTRODUCCIÓN

La investigación en Educación Matemática es un campo en continuo cambio y progreso. Este artículo se basa más que nada en una investigación sobre las bases de Gröbner aplicadas en la resolución de sistemas de ecuaciones polinomiales que se pueden emplear para la enseñanza de las matemáticas porque aún se siguen disponiendo de un conjunto de estrategias metodológicas para abordar su objeto de estudio.

Según López Aguilar y López Sánchez (2016) el impacto que ha tenido la computadora en la sociedad ha llevado a una reflexión en torno a su uso en el salón de clase. Antiguamente se consideraba que la enseñanza de las matemáticas era un arte y, como tal, difícilmente susceptible de ser analizada, controlada y sometida a reglas. Se suponía que el aprendizaje de los alumnos dependía sólo del grado en que el profesor dominase dicho arte y, en cierto sentido, de la voluntad y la capacidad de los propios alumnos para dejarse moldear por el artista. El aprendizaje es considerado como un proceso psico-cognitivo fuertemente influenciado por factores motivacionales y actitudinales del alumno-aprendiz.

A pesar de su relevancia en el álgebra computacional y otras áreas, las bases de Gröbner son una herramienta subestimada y poco investigada, especialmente en el ámbito hispanohablante. Existe una clara necesidad de abordar este tema debido a

las múltiples aplicaciones de las bases de Gröbner en la resolución de problemas de geometría algebraica computacional moderna y la escasa información disponible en los buscadores, lo que dificulta su estudio y comprensión.

El presente artículo tiene como objetivo brindar una introducción básica y accesible a las bases de Gröbner, dirigida principalmente a estudiantes de las ciencias Físico-Matemáticas (Herrera-Castrillo, 2023a). La finalidad es contribuir a la difusión de esta rama del álgebra que simplifica tanto la teoría como la práctica en la resolución de sistemas de ecuaciones polinomiales.

Es importante resaltar que la aplicación de las bases de Gröbner va mucho más allá de la resolución de sistemas de ecuaciones, pero en este artículo se abordará el tema desde esta perspectiva. Además, se espera despertar la curiosidad de los lectores por acercarse al Álgebra Computacional, de manera que con la ayuda de software especializado, la aplicación de las bases de Gröbner sea más sencilla.

Cabe mencionar que el Álgebra encierra una belleza que no siempre se aprecia a simple vista. Sin embargo, existe una problemática en torno a la escasez de información e investigación sobre este tema, particularmente en el idioma español. Esta situación dificulta la familiarización de los lectores con el tema, ya que no es un tópico comúnmente abordado, lo que genera un vacío de conocimiento al respecto.

La investigación sobre las bases de Gröbner y su aplicación a sistemas de ecuaciones polinomiales es sumamente relevante y útil en diversos campos de las matemáticas y la computación. Algunos de los principales beneficios y aplicaciones son:

- Resolución de sistemas de ecuaciones polinomiales: Las bases de Gröbner proporcionan un método sistemático para encontrar todas las soluciones, incluyendo las complejas y múltiples (Illana Martos, 2005; López-López et al., 2023; Acevedo Montenegro et al., 2024).
- Geometría algebraica: Las bases de Gröbner son fundamentales para estudiar las propiedades de variedades algebraicas, como la intersección de curvas y superficies (Recio, 2008; Salinas Encimas, 2020).
- Álgebra computacional: Permiten la manipulación y simplificación eficiente de expresiones algebraicas.

Estas aplicaciones tienen un amplio impacto en áreas como matemáticas puras, computación simbólica, criptografía, entre otras, al resolver problemas complejos de manera estructurada y eficiente.

Además, la investigación en este campo tiene una importante relevancia social al contribuir al desarrollo de herramientas matemáticas avanzadas que benefician a estudiantes, educadores e investigadores. Permite enriquecer los programas académicos, preparar a futuras generaciones con sólidas habilidades técnicas y analíticas, y fomentar el progreso en la comprensión de estructuras matemáticas fundamentales (Infante et al., 2010).

A medida que la investigación sobre las bases de Gröbner avanza, se irán abordando los vacíos de conocimiento existentes y generando nuevos conocimientos y capacidades que puedan tener un impacto significativo en diversas disciplinas. Es importante seguir un enfoque metodológico riguroso que incluya objetivos, preguntas de investigación y técnicas adecuadas de recolección y análisis de datos.

En el campo de la carrera de Matemática, un artículo que aborde el tema de las Bases de Gröbner sería un valioso aporte para las próximas generaciones. Les serviría como base para futuras investigaciones, fortalecería sus conocimientos y les facilitaría el proceso al estar en español, lo cual es beneficioso para su desempeño académico y desarrollo profesional.

El artículo aporta conocimientos teóricos significativos al ser uno de los pocos escritos en español que aborda el tema de las Bases de Gröbner en el desarrollo de habilidades en Álgebra Computacional. Los antecedentes revisados abordan al menos una de las variables de interés, siendo las Bases de Gröbner un eje central en la teoría del Álgebra Computacional (Moran, 2019). Dichas bases han permitido investigar diversas ramas de las matemáticas, como Álgebra Conmutativa, Geometría Algebraica, Teoría de Grafos, Teoría de Códigos y Criptografía (Herrera-Castrillo, 2023b).

Conforme Alcántara García (2023), las Bases de Gröbner son una herramienta esencial en la geometría algebraica computacional moderna, pues permiten trabajar algorítmicamente con ideales de polinomios en varias variables. Sin embargo, su complejidad computacional limita sus aplicaciones prácticas. Según Gárate Cahuantzi (2023), el propósito de las Bases de Gröbner es resolver sistemas de ecuaciones polinomiales para encontrar soluciones lo más exactas posibles, sin importar el grado de complejidad del sistema.

El estudio de las Bases de Gröbner es relativamente nuevo, data de aproximadamente 1966, cuando Bruno Buchberger encontró una base del espacio vectorial cociente para el anillo de clases, módulo un ideal de polinomios cero dimensional (Garrido Cruces, 2021). Según Ochoviet (2007), el conocimiento de estas bases brinda información importante acerca de los posibles obstáculos y dificultades que pueden enfrentar los estudiantes al abordar su estudio.

## Preguntas de Investigación

1. ¿Cuáles son las aplicaciones de las bases de Gröbner en la resolución de sistemas de ecuaciones polinomiales?
2. ¿Cómo pueden las bases de Gröbner facilitar la enseñanza de álgebra y geometría en la educación matemática?
3. ¿Qué desafíos se enfrentan al incorporar las bases de Gröbner en el currículo educativo, especialmente en el contexto hispanohablante?

## Objetivos del artículo

El objetivo principal de este trabajo es presentar una revisión exhaustiva de las aplicaciones de las bases de Gröbner en la resolución de sistemas de ecuaciones polinomiales. Específicamente, el estudio se propone:

- Analizar investigaciones previas sobre el tema para sintetizar los principales hallazgos y metodologías empleadas.
- Explorar el impacto de las nuevas tecnologías educativas en la enseñanza de las matemáticas, destacando el papel fundamental de las computadoras en el álgebra computacional.
- Proveer una visión integral sobre cómo las bases de Gröbner pueden ser utilizadas como una herramienta clave en la educación matemática y en la resolución de diversas dificultades algebraicas.

El artículo introduce de manera accesible las bases de Gröbner para estudiantes de ciencias físico-matemáticas, con el objetivo de difundir esta parte del álgebra que simplifica la teoría y práctica de resolver sistemas de ecuaciones polinomiales, además de despertar interés en el álgebra computacional y fomentar el uso de software especializado. Sin embargo, la escasez de investigaciones y recursos en español sobre este tema dificulta su comprensión y enseñanza, representando un desafío para su adopción en la comunidad hispanohablante.

## II. METODOLOGÍA

De acuerdo con Vivar et al. (2013), la investigación cualitativa "tiende a enfatizar los aspectos dinámicos, holísticos e individuales de la experiencia humana donde interactúan las versiones y opiniones de distintos actores, capturando los aspectos en su totalidad dentro del contexto de quienes lo están experimentando". Además, mencionan que el propósito de la investigación cualitativa no es la predicción ni el control, sino más bien la descripción, y que es importante cuando se conoce poco sobre un fenómeno o cuando las teorías presentes necesitan ser revisadas.

En este sentido, para esta investigación cualitativa se realizó una búsqueda de información, revisión de textos y recolección de datos que permitieron localizar documentos académicos relevantes, como artículos, tesis y libros de fuentes confiables basadas en las investigaciones de otros actores relacionados con el tema. Los documentos encontrados provienen de diversas editoriales universitarias, profesionales y otras organizaciones académicas, y abarcan diferentes años.

### – Búsqueda bibliográfica

La búsqueda bibliográfica para este estudio se realizó utilizando la base de datos de Google Académico, concentrándose en estudios publicados sobre las bases de Gröbner y su aplicación en la resolución de sistemas de ecuaciones polinomiales. Se emplearon palabras clave específicas, como "bases de Gröbner", "resolución de ecuaciones polinomiales", "álgebra computacional", "educación matemática" y "pensamiento computacional", con el fin de identificar la literatura más relevante para el tema.

### – Criterios de selección

Para garantizar la relevancia y calidad de los estudios incluidos en esta revisión, se aplicaron los siguientes criterios de selección:

**Tabla 1**  
*Criterios de inclusión, exclusión y eliminación*

Inclusión	Exclusión	Eliminación
Investigaciones que den un apoyo teórico sobre la temática.	Investigaciones donde no se encuentren datos de autores, año de publicación, lugar o revista de publicación.	Investigaciones que estén en sitios web de poca fidelidad.
Indagación en las que se vea una perspectiva de enseñanza algebraica.	Investigación donde la información no es inmensamente relacionada a la temática.	

En toda investigación es necesario llevar a cabo la recolección de datos, este es un paso fundamental para tener éxito en la obtención de resultados. El llevar adecuadamente la recolección de datos y la escogencia del método de recolección de datos es una tarea que todo investigador debe conocer y debe tener mucha práctica en ella. Ya que recopilación de datos es considerada como la medición, es una precondición para obtener el conocimiento científico. El instrumento de reunir datos está orientado a crear las condiciones para la medición. Los datos son conceptos que expresan una abstracción del mundo real, de lo sensorial, susceptible de ser percibido por los sentidos de manera directa o indirecta, donde todo lo empírico es medible (Hernández Mendoza y Duana Avila, 2020).

La ejecución del estudio se conduce a partir de ciertos niveles que permiten aplicar su metodología, las cuales son las siguientes:

- Organización de la temática sistema de ecuaciones polinomiales.
- El análisis de fuentes que abordan la similitud del contenido relacionado al sistema de ecuaciones polinomiales usando las bases de Gröbner.
- Investigación de las técnicas y procesos utilizados para el estudio de las bases de Gröbner.
- Conocer sobre el uso del álgebra computacional para encontrar solución al sistema de ecuaciones polinomiales.

#### **– Recuperación de la información. Fuentes documentales**

En la elaboración de este artículo, se tomó en cuenta los protocolos de investigación. Según Arias Gómez et al. (2016), "la población de estudio es un conjunto de casos definido, limitado, accesible, que formará el referente para la elección de la muestra". En este caso, la población corresponde a 30 citas bibliográficas que se diferencian por su nivel de similitud en materia, forma de aclaración, propósito o campo de las matemáticas.

Asimismo, Arias Gómez et al. (2016) mencionan que "para cualquier investigación se incluyen muestras de la población o subgrupos por algunas razones como por ejemplo ahorrar tiempo, recursos y en un sentido estricto y ético no es necesario estudiar al total la población cuando con una porción se puede conseguir los objetos de estudio". En este caso, la muestra utilizada para la investigación consta de 20 citas bibliográficas seleccionadas de la población de 30 citas.

– **Evaluación de la calidad de los artículos seleccionados**

La calidad de los artículos seleccionados se evaluó utilizando criterios estandarizados, tales como:

- Rigor metodológico: Claridad en la descripción de los métodos utilizados y adecuación del diseño de investigación.
- Validez interna: Grado en el que los resultados del estudio son coherentes y bien fundamentados.
- Relevancia: Pertinencia del estudio para los objetivos de la revisión y su contribución al campo de estudio.

– **Análisis de la variabilidad y validez de los artículos**

El análisis de la variabilidad se centró en identificar y comparar los diferentes enfoques y metodologías utilizados en los estudios seleccionados. Se evaluó la validez de los artículos considerando la coherencia de los resultados y la solidez de las conclusiones presentadas. Este análisis permitió identificar tendencias comunes, áreas de consenso y discrepancias en la literatura existente.

Este enfoque metodológico garantiza que la revisión proporcione una visión exhaustiva y confiable de las aplicaciones de las bases de Gröbner en la resolución de sistemas de ecuaciones polinomiales, proporcionando así una base sólida para futuras investigaciones en este campo.

### **III. RESULTADOS Y DISCUSIÓN**

En esta sección se presentan los hallazgos obtenidos del estudio, enfocándose en los datos recopilados y analizados. Se discutirá la relación entre las variables y se interpretarán los resultados evaluando tanto el cumplimiento de las hipótesis planteadas como las implicaciones de los resultados para el estudio.

Los resultados que se obtuvieron al analizar las 20 investigaciones, divididas en artículos, tesis y libros, son los siguientes:

**Tabla 2****Análisis según la categoría más relevante en los artículos**

Categorías en las que se dividieron los documentos	Frecuencia	Porcentaje
Aprendizaje matemático	1	5%
Tecnología	3	15%
Educación matemática	4	20%
Pensamiento computacional	2	10 %
Algebra	1	5 %
Bases de Groebner	7	35%
Resolución de ecuaciones polinomiales	2	10%
<b>Total</b>	<b>20</b>	<b>100 %</b>

Las categorías que se han presentado se seleccionaron de acuerdo a la similitud y la relación que existe entre ellas, esto se denotó por que se logró observar con las revisiones de las diferentes investigaciones que cada una de ellas poseen conocimientos que las enlaza entre sí, a pesar de que los porcentajes obtenidos no lo reflejan, esto se debe a la cantidad de investigaciones que se tomaron en cuenta para explicar el concepto de cada categoría mencionada.

Se puede observar que la mayor información analizada está basada en la categoría de las bases de Gröbner, esto debido a que es el mayor objetivo de análisis de este artículo, también se encuentra información sobre la resolución de ecuaciones polinomiales, ya que es la base para el conocimiento que se pretende transmitir sobre estas herramientas. Además de contar con información basada en la educación matemática, porque esto permite ver cómo va fluyendo con el paso del tiempo la manera de enseñar matemática, al igual se presenta información sobre la tecnología, dado que esta forma parte del crecimiento que va teniendo la educación.

Pueden percibir que el pensamiento computacional, álgebra y aprendizaje matemático son los porcentajes bajos de la investigación, debido a que la información encontrada no brindaba los datos necesarios que confirmara su confiabilidad para poder tomarla en cuenta en esta investigación. Por último, se quiere recalcar que este artículo posee información que corresponde al análisis e interpretación de las investigaciones relacionadas al tema de estudio, aunque esta no este presentada con porcentaje.

En esta sección, se presentan las investigaciones a las que se les hizo una revisión exhaustiva para poder tomarlas en cuenta y facilitar una información clara y precisa en relación con las bases de Gröbner y temáticas que poseen similitud con esta, al igual proporcionar a los lectores y futuros investigadores una base comprensible y sobre todo en habla hispana que les permita empezar a conocer dicha temática.

La enseñanza y aprendizaje de la Matemática debe transitar de un método tradicional, que son procesos mecánicos que utilizan la memoria antes que el desarrollo del razonamiento lógico y matemático hacia la implementación de metodologías activas que propicien el desarrollo del pensamiento en toda su dimensión y que le permitan al estudiante ser protagonista de su propio desarrollo en vínculo con el contexto. De acuerdo con Intriago Proaño y Naranjo Flores (2023) el aprendizaje de los estudiantes ha sido motivo de diversas investigaciones, en cuanto a la matemática se ha observado una falta de motivación en los estudiantes debido a las estrategias y modelos de enseñanza tradicional de los docentes, por ende, para la enseñanza de las matemáticas es necesario cambiar métodos típicos, para mejorar el interés y la participación activa en las actividades académicas, implementando estrategias creativas para salir de lo rutinario en el área de las matemáticas.

De acuerdo con Merino Barona (2023), el rol de las matemáticas tiene un impacto en el desarrollo cognitivo, la integración de la tecnología y la formación en la educación, estos elementos contribuyen al aprendizaje matemático y al desarrollo general de los estudiantes en las primeras etapas educativas. Destacando la importancia de métodos de enseñanza innovadores que fomenten el desarrollo del pensamiento computacional, lo que con lleva a una formación docente continua y adaptada a los desafíos actuales. Conforme a Gómez (1997), el impacto de la tecnología en la educación se estudia desde varias perspectivas, teniendo en cuenta los resultados didácticos que se obtienen gracias a la aparición de la computación. Aunque la tecnología, no es la solución a los problemas de la enseñanza y del aprendizaje de las matemáticas, existen indicios de que ella se convertirá paulatinamente en un agente catalizador del proceso de cambio en la educación matemática.

De acuerdo con Infante et al. (2010), la educación matemática, entendida como la comunicación de experiencias, saberes, habilidades, destrezas, actitudes y valores propios de la actividad matemática, tiene la obligación de formar seres humanos competentes en su campo y con una mejor comprensión del mundo, no puede ni debe soslayar la incorporación del uso de las tecnologías en su quehacer. Según Motoa (2019), el desarrollo del pensamiento computacional, potencia competencias y habilidades en los estudiantes, favoreciendo al desarrollo del pensamiento crítico, ingenioso e innovador del estudiante para la resolución de problemas, desarrollando así un ciudadano competente para asumir los retos tecnológicos de la sociedad actual.

También, Magreñán Ruiz et al. (2024) hablan de que se ha vuelto una prioridad educativa promover el desarrollo computacional en varios países del mundo con el incremento del uso de las tecnologías en la actualidad, utilizando programas para hacer cálculos matemáticos y de esta manera realizar nuevas estrategias pedagógicas basadas en la actualidad que se está viviendo.

Como plantean Zapata et al. (2021) que hay numerosos destrezas y conceptos propios de pensamiento computacional, que son necesarios como base para los estudios, estos conceptos y procedimientos no constan de forma explícita por eso es necesaria una base cognitiva que sea de gran utilidad y sirva como pilar para empezar en este sistema algebraico.

Según Dayal (2015), la ingeniería en sistemas computacionales es un modo de enfoque interdisciplinario que permite estudiar y comprender de manera más fácil la calculación de ejercicios. Teniendo como propósito el implementar u optimizar sistemas informáticos complejos que sirvan para hacer los cálculos.

De acuerdo con Navas López (2024), el pensamiento algorítmico es una parte fundamental del pensamiento computacional, pero también es un tipo de pensamiento matemático, la habilidad de algoritmizar es básica en la matemática y por tanto en el pensamiento algorítmico y computacional brindando exploración y descubrimiento en la matemática.

El álgebra computacional se dedica a la manipulación y resolución de problemas algebraicos mediante algoritmos y ordenadores. De acuerdo con Mondurrey Ortín (2019) y González Casero (2024) las bases de Groebner, hacen parte de la rama matemática conocida como Geometría Algebraica Computacional. Gracias a sus caracteres algorítmicos permiten abordar de manera computacional diversas aplicaciones en múltiples áreas de conocimientos, están ligadas a un alto manejo computacional. Según Bose (1995), el método de las bases de Gröbner es una técnica que proporciona soluciones algorítmicas a una variedad de tales problemas, por ejemplo, soluciones exactas de  $F$  vistas como un sistema de ecuaciones algebraicas, solución polinomial de la ecuación entre otras.

En este apartado según Buchberger y Kauers (2010), el objetivo principal de las bases de Groebner es servir a la exploración de la teoría matemática y, en particular, al razonamiento automatizado. También las describen como un conjunto de polinomios no lineales que disfrutan de ciertas propiedades que permiten soluciones algorítmicas simples para muchos problemas fundamentales en matemáticas y dan como ejemplo de tales problemas: la solución de sistemas algebraicos de ecuaciones, al igual que otros problemas relacionados con el álgebra.

Collazo et al. (2015) plantean que uno de los problemas más importantes en las matemáticas es determinar si un sistema de ecuaciones polinomiales tiene o no soluciones. Es necesario buscar condiciones suficientes para garantizar que el sistema tenga solución, ya que este es un problema presente en prácticamente todas las ramas de la ciencia e incluso en muchas situaciones de la vida cotidiana. Por ello, se hace necesario el estudio de algoritmos que permitan saber si un sistema tiene o no soluciones. En caso de tenerlas, es necesario determinar si son un número finito

o si existe un número infinito de ellas, y ser capaces de describir estas soluciones de forma explícita. Por lo tanto, es crucial desarrollar algoritmos que ayuden a responder estas preguntas.

La computación mediante las bases de Gröbner es una de las principales herramientas para resolver sistemas de ecuaciones polinomiales, ya que las bases de Gröbner se estudian en asignaturas de Ecuaciones Algebraicas y de Álgebra Conmutativa y Computacional.

El tema ha recobrado importancia con el surgimiento de la computación, que en particular ha introducido la necesidad del estudio de los aspectos algorítmicos de distintos problemas en esta área. Los sistemas polinomiales son una pieza importante dentro de la organización de problemas reales. El estudio y cálculo de sus soluciones exactas constituyen todo un campo de trabajo con aplicaciones directas en la economía, la ingeniería, informática, telecomunicaciones. Estos problemas se estudian dentro de diversas ramas de las matemáticas.

Se presenta un ejemplo donde se utilizarán las bases de Gröbner en la solución de un sistema de ecuaciones.

Considerar las siguientes ecuaciones

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (1)$$

$$x^2 + z^2 = y \quad (2)$$

$$x = z \quad (3)$$

Estas ecuaciones determinan  $I = (x^2 + y^2 + z^2 - 1, x^2 + z^2 - y, x - z) \subseteq \mathbb{C}[x, y, z]$ , y se quiere encontrar todos los puntos en  $V(I)$ . La Preposición 2 implica que podemos escribir que se puede escribir  $V(I)$  usando cualquier base de  $I$ . Así se observa que ocurre cuando se usan las bases de Gröbner. Aunque aún no hay necesidad de hacerlo por el momento, escribiremos una base reducida de Gröbner de  $I$  con el orden Lex respectivo. La base es:

$$g_1 = x - z, \quad (4)$$

$$g_2 = y - 2z^2, \quad (5)$$

$$g_3 = z^4 + \left(\frac{1}{2}\right)z^2 - 1/4. \quad (6)$$

Se observa detenidamente los polinomios, se podrá encontrar algo destacable. Primero, el polinomio  $g_3$  depende solamente de  $z$ . Para encontrar las raíces, se resuelve

para  $z^2$  por la fórmula cuadrática y obtener las raíces cuadradas. Esto da cuatro valores para  $z$ :

$$Z = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\pm \sqrt{5 - 1}} \quad (7)$$

Después, cuando los valores de  $z$  son reemplazados en las ecuaciones  $g_2 = 0$  y  $g_1 = 0$ , esas dos ecuaciones pueden ser resueltas únicamente para  $y$  y  $x$  respectivamente. Así, hay cuatro soluciones en conjunto para  $g_1 = g_2 = g_3 = 0$ , dos reales y dos complejas. Dado que  $V(I) = V(g_1, g_2, g_3)$ , por la proposición 2, ya se ha encontrado todas las soluciones de las ecuaciones.

En particular, se ha visto que obtener ecuaciones donde las variables son eliminadas sucesivamente. Además, notar que el orden de eliminación parece ser que corresponde al orden de las variables. Un sistema de ecuaciones de esta forma es fácil de resolver, especialmente cuando la última ecuación contiene solo una variable. Se puede aplicar técnicas de una variable única para probar y encontrar las raíces, luego sustituir para resolver las otras variables.

## IV. CONCLUSIONES

Según los resultados encontrados, se concluye que:

- **Subestimación y falta de Investigación:** A pesar de su importancia, las bases de Gröbner están relativamente subestimadas y poco investigadas, especialmente en el contexto hispanohablante. La mayoría de los estudios se centran en otros idiomas, lo que limita su accesibilidad y comprensión en el mundo de habla hispana.
- **Desafíos en la Búsqueda de Información:** Existe una dificultad significativa para encontrar información relevante sobre las bases de Gröbner en los buscadores académicos, lo que dificulta que los investigadores y educadores profundicen en el tema y apliquen estos conceptos en la práctica.
- **Aplicaciones Educativas:** Las bases de Gröbner tienen un gran potencial en la educación matemática, ya que pueden facilitar el aprendizaje y la enseñanza del álgebra y la geometría. Integrar estos conceptos en el currículo educativo, utilizando herramientas computacionales, podría mejorar la comprensión de los estudiantes y fomentar el pensamiento computacional.
- **Contribución del Estudio:** Este artículo ha recopilado y sintetizado la información disponible sobre las bases de Gröbner y su aplicación en sistemas de ecuaciones polinomiales. Proporciona una base sólida para futuras

investigaciones en español y destaca la necesidad de ampliar el conocimiento y los recursos disponibles en este campo.

## V. REFERENCIAS

- Acevedo Montenegro, R. S., Blandón Vindell, C. J., Picado Castillo, C. D., Triminio-Zavala, C. M., y Herrera-Castrillo, C. J. (2024). Resolución de problemas con integrales para el estudio del principio de Arquímedes en física vectorial. *Revista Wani*, 40(80), 1-16. <https://doi.org/10.5377/wani.v40i80.17643>
- Alcántara García, D. I. (2023). *Bases de Gröbner* [Tesis de Grado, Universidad de contaria, Contrabia]. <https://repositorio.unican.es/xmlui/handle/10902/29856>
- Arias Gómez, J., Villasis Keeve, M. Á., y Miranda Novales, M. G. (2016). El protocolo de investigación III: la población de estudio. *Revista Alergia México*, 62(2), 201-206. <https://www.redalyc.org/pdf/4867/486755023011.pdf>
- Bose, N. (1995). Bases de Gröbner: un método algorítmico en la teoría del ideal polinómico. (S. P. Bajos Ed.). *Revista Teoría y Aplicaciones de Sistemas Multidimensionales*, 89-127.
- Buchberger , B., y Kauers, M. (2010). bases de groebner. *Revista Scholarpedia*, 5(10), 7763. <https://doi.org/10.4249/scholarpedia.7763>
- Collazo, R., De la Cruz, J., y Ramírez, D. (2015). Solvability of systems of polynomial equations over finite fields. *Revista de investigación y labor creativa*, 1(2), 1-8. [http://ccom.uprrp.edu/~labemmy/Wordpress/wp-content/uploads/2023/01/Articulo\\_Ingenios\\_Version\\_2-12.pdf](http://ccom.uprrp.edu/~labemmy/Wordpress/wp-content/uploads/2023/01/Articulo_Ingenios_Version_2-12.pdf)
- Dayal, C. (2015). *Informe de Algebra*. <https://es.scribd.com/document/295345556/Informe-de-Algebra>
- Gárate Cahuantzi, Z. A. (2023). *Bases de Gröbner aplicadas a la geometría en ciencias de la computación* [Tesis de Grado, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México]. <https://repositorioinstitucional.buap.mx/items/67d13265-464e-4e64-8057-b8fc60390253>
- Garrido Cruces, S. A. (2021). *Bases de Gröbner y aplicaciones a sistemas de ecuaciones polinomiales* [Tesis de Pregrado, Universidad del Bío Bío]. <http://repobib.ubiobio.cl/jspui/handle/123456789/3741>

- Gómez, P. (1997). Tecnología y educación matemática. *Informática Educativa*, 10(1), 93-111. <https://repositorio.uniandes.edu.co/entities/publication/5f3bc560-0680-4494-a18d-6ac000efd16e>
- González Casero, J. (2024). *Bases de Gröbner y Aplicaciones en Teoría de Grafos: Problema de Asignación de Aulas como K-Coloreado* [Tesis de Grado, Universidad Rey Juan Carlos]. <https://hdl.handle.net/10115/34441>
- Hernández Mendoza, S. L., y Duana Avila, D. (2020). Técnicas e instrumentos de recolección de datos. *Boletín Científico de las Ciencias Económico Administrativas del ICEA*, 9(17), 51-53. <https://doi.org/10.29057/icea.v9i17.6019>
- Herrera-Castrillo, C. J. (2023a). Interdisciplinariedad a través de la Investigación en Matemática y Física. *Revista Chilena de Educación Matemática*, 15(1), 31-45. <https://doi.org/10.46219/rechiem.v15i1.126>
- Herrera-Castrillo, C. J. (2023b). Aplicaciones del Lenguaje de Categorías en diferentes actividades científicas y tecnológicas. *Ciencia e Interculturalidad*, 33(2), 187-204. <https://doi.org/10.5377/raci.v33i2.17723>
- Illana Martos, A. (2005). *Análisis, Validación y Desarrollo del “Método de Liberación Sucesiva de Elementos”. Aplicación a Robots Manipuladores* [Tesis Doctoral, Universidad de Cádiz]. <https://www.proquest.com/openview/8967a8dbe928e557ced370ec7b2e2b1d/1?pq-origsite=gscholar&cbl=18750ydiiss=y>
- Infante, P., Quintero, H., y Logreira, C. (2010). Integración de la tecnología en la educación matemática. *Revista electrónica de estudios telemáticos*, 9(1), 33-46. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=78415022003>
- Intriago Proaño, S. M., y Naranjo Flores, C. A. (2023). El aprendizaje de la matemática en estudiantes de educación general básica. *Revista científica mundo de la investigación y el conocimiento*, 7(1), 640-653. [https://doi.org/10.26820/recimundo/7.\(1\).enero.2023.640-653](https://doi.org/10.26820/recimundo/7.(1).enero.2023.640-653)
- López Aguilar, K., y López Sánchez, J. Á. (2016). Educación matemática y tecnologías empleadas para la enseñanza de las matemáticas. *Revista electronica de investigacion einnovacion educativa*, 1(2), 59- 70. <https://core.ac.uk/download/pdf/85144055.pdf#page=57>
- López López, L. J., Rivera Díaz, R. E., Carrasco Sánchez, S. d., Medina Martínez, W. I., y Herrera Castrillo, C. J. (2023). Aplicaciones del cálculo integral en

- la compresibilidad de fluidos en un campo vectorial. *Revista Ciencia e Interculturalidad*, 32(1), 23-42. <https://doi.org/10.5377/rcl.v32i01.16232>
- Magreñán Ruiz, Á. A., González Crespo, R. A., Jiménez Hernández, C., y Orcos Palma, L. (2024). Desarrollo del pensamiento computacional a través de BlocksCAD, Blockly y la resolución de problemas en matemáticas. *Revista española de pedagogía*, 82(287), 135-152. <https://doi.org/10.22550/2174-0909.3933>
- Merino Barona, A. C. (2023). Relacionado de las matemáticas en la educación preescolar y educación primaria. *Revista multidisciplinaria ciencia latina*, 7(6), 6947-6964. [https://doi.org/10.37811/cl\\_rcm.v7i6.9212](https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v7i6.9212)
- Mondurrey Ortín, D. (2019). *Bases de Groebner y Aplicaciones en Teoría de Grafos* [Tesis de Grado, Universidad de Zaragoza]. <https://core.ac.uk/download/pdf/290002542.pdf>
- Moran, S. D. (2019). Una introducción a las Bases de Gröbner. *Boletín de Matemáticas*, 26(2), 1-16. <https://revistas.unal.edu.co/index.php/bolma/article/view/85543>
- Motoa, S. P. (2019). Pensamiento computacional. *Revista educación y pensamiento*, 26(26), 107-111. <http://educacionypensamiento.colegiohispano.edu.co/index.php/revistaeyp/article/view/104>
- Navas López, E. A. (2024). Relaciones entre la matemática, el pensamiento algorítmico y el pensamiento computacional. *IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH*, 15(1929), 1-21. [https://doi.org/10.33010/ie\\_rie\\_rediech.v15i0.1929](https://doi.org/10.33010/ie_rie_rediech.v15i0.1929)
- Ochoviet, C. (2007). De la resolución de ecuaciones polinómicas al álgebra abstracta: Un paseo a través de la historia. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*, 8(1), 1-19. <https://www.redalyc.org/pdf/6079/607972912003.pdf>
- Recio, T. (2008). La columna de matemática computacional. *La Gaceta de la RSME*, 11(2), 317-336. [http://dmle.icmat.es/pdf/GACETARSME\\_2008\\_11\\_1\\_02.pdf](http://dmle.icmat.es/pdf/GACETARSME_2008_11_1_02.pdf)
- Salinas Encimas, A. (2020). *Teoría de códigos sobre curvas algebraicas y aplicación de las bases de Gröbner* [Tesis de Magíster, Pontificia Universidad Católica del Perú]. <https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/17895>
- Vivar, C., McQueen, A., Whyte, D., y Armayor, C. (2013). Primeros pasos en la investigación cualitativa: desarrollo de una propuesta de investigación. *Index de Enfermería*, 22(4), 222-227. <https://doi.org/10.4321/S1132-12962013000300007>.

Zapata, J. M., Jameson, E., Zapata Ros, M., y Merrill, D. (2021). El Principio de Activación en el Pensamiento Computacional, las Matemáticas y el STEM1. *Revista de Educación a Distancia*, 21(68), 2-9. <https://doi.org/10.6018/red.49853>