


ARTÍCULO ORIGINAL

Método riguroso para análisis previo del rango de temperaturas valido para problemas de calorimetria que presenten cambios de fase

A rigorous method for the preliminary analysis of the valid temperature range in calorimetry problems involving phase changes

F. De Garay-Arcones *

Departamento de Materia Condensada, Escuela de Física, Facultad de Ciencias. Universidad Nacional Autónoma de Honduras
- Ciudad Universitaria. Tegucigalpa 11101, Honduras
Correo electrónico: felipe.garay@unah.edu.hn (F.G.A)

* Autor de correspondencia

Recibido: 19 de noviembre de 2024; Revisado: 20 de noviembre de 2024; Aceptado: 6 de marzo de 2026;
Publicado: 20 de junio de 2026

Resumen

En la enseñanza a nivel de pre-grado de problemas de intercambio de calor entre sustancias a alta temperatura y sustancias a baja (calorimetría), el principio de conservación de energía (calorífica, en este caso) es el fundamento para la resolución de los mismos. Desde hace algunos años, probablemente para asociar a los signos de calor los conceptos de “sistema” y “entorno”, la ecuación de conservación de energía calorífica se suele escribir $\sum Q_i = 0$.¹ En el trabajo que vamos a exponer es mejor (incluso necesario) volver a la “antigua” forma de escribir esa conservación de energía calorífica con la expresión $Q_{adsorbido} = Q_{cedido}$,¹ de forma que el calor se escriba con signo positivo en ambos miembros de la igualdad. Nuestro trabajo es novedoso porque introduce un camino riguroso (no usado en la bibliografía habitual) a la hora del cálculo de la temperatura final de la mezcla frío-caliente, cuando el rango entre $T_{caliente}^{inicial}$ y $T_{fria}^{inicial}$ incluye temperaturas de cambio de fase en alguna de las sustancias que se mezclan. Para esos casos en que es posible un cambio de fase, introducimos además un empleo del diagrama temperatura-calor en una forma también en parte novedosa, lo cual será muy útil para el análisis previo a obtener la temperatura final de equilibrio.

Palabras clave: Calorimetría; conservación de la energía; cambios de fase; equilibrio térmico; temperatura final; diagrama temperatura-calor; enseñanza de la física; intercambio de calor

Abstract

In the undergraduate teaching of heat exchange problems between hot and cold substances (calorimetry), the principle of conservation of energy (heat, in this case) is the key for solving such problems. For some years now, probably to associate the concepts of "system" and "environment" with the signs of heat, the equation for the conservation of heat energy is usually written $\sum Q_i = 0$. In the work that we are going to present, it is better (even necessary) to go back to the "old" way of writing that conservation of heat energy with the expression $Q_{adsorbed} = Q_{ceded}$ ¹, so that the heat is written with a positive sign on both sides of equality. Our work is novel because it introduces a rigorous path (not used in the bibliography) when calculating the final temperature of the hot-cold mixture, when the range between $T_{hot}^{initial}$ and $T_{cold}^{initial}$ includes phase change temperatures in any of the substances that are mixed. To those cases in which a phase change is possible, we also introduce a use of the temperature-heat diagram in a way that is also partly novel, which will be very useful for the analysis prior to obtaining the final equilibrium temperature.

Keywords: Calorimetry; energy conservation; phase changes; thermal equilibrium; final temperature; temperature-heat diagram; physics education; heat exchange

1. Introducción

En los problemas que se proponen y usan habitualmente en la bibliografía de pre-grado para tratar las situaciones de intercambio calorífico entre sustancias calientes y frías aparece una situación que requiere usar un método cuantitativo riguroso.

¹ Se trata de problemas en que, obtenido el equilibrio térmico, tras la mezcla caliente-frío, se puede dar cambio de estado en una o dos de las sustancias.

Situaciones de este tipo permiten que –supongamos que sólo una de las sustancias puedan experimentar cambio de fase– que la temperatura final quede por debajo de la del cambio de fase, coincida con ésta o quede por encima.

Los libros de texto habituales no explican qué hacer para tomar la decisión de cuál ha de ser la situación final (en lo relativo a lo inmediatamente dicho sobre la temperatura de equilibrio). O bien se propone un método de tanteo (pruebe una opción y si no tiene sentido, pruebe otra; así hasta que halle el que sea aceptable físicamente) o bien no se explica nada. Por ejemplo en la página 568, la parte "Estrategia para resolver problemas al final el autor dice textualmente relativo a lo que trataremos: *"Si se produce un cambio de fase, tal vez no sepa de antemano si todo el material, o solo una parte de este, experimenta un cambio de fase. Haga una suposición razonable; si esto lo conduce a un resultado poco razonable (tal como una temperatura final superior o inferior a cualquier temperatura inicial), la suposición era errónea. ¡Intente de nuevo!"*

² Este artículo muestra un método riguroso que permite discernir vía cálculos cuál deba ser

¹Ver por ejemplo [1], pág 568. Los autores proponen probar de nuevo con una nueva suposición si el resultado fuera "poco razonable" (es decir, tanteo hasta obtener un resultado físicamente aceptable).

En [2] los autores no tocan el tema, aunque sí se proponen problemas a resolver que involucran cambio de fase, por ejemplo, el problema 18, pág. 629.

[3], pp. 371 a 373, recomienda hacer una tabla con los valores de calor, pero sigue proponiendo el sistema de "tanteo": si un resultado no tiene sentido físico, probar de nuevo con otra suposición

²Ver la referencia [1]

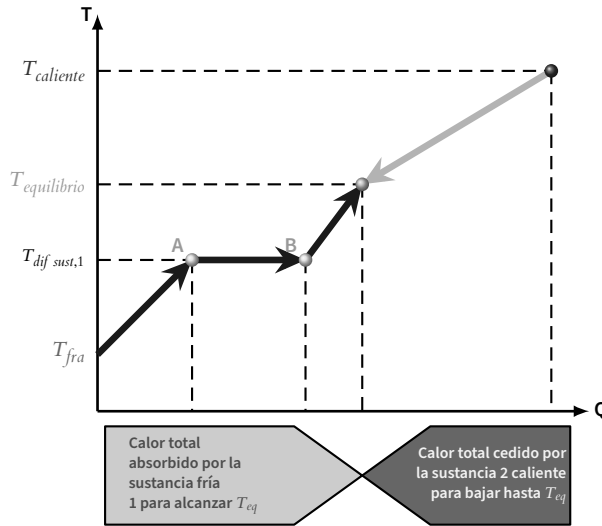


Figura 1. Diagrama $T - Q$ para dos sustancias

la situación final. Además, se usa el conocido diagrama temperatura-calor como instrumento muy útil para todo el trabajo, cosa que tampoco aparece en la bibliografía tradicional.

2. Cómo usar el diagrama T-Q simultáneamente para dos sustancias que intercambian calor

Esencialmente se trata de que un mismo diagrama $T - Q$ sirva para que las dos sustancias se mezclan³.

El uso de la conservación de energía en la forma de la ecuación⁴ se muestra también en el diagrama: la sustancia con flechas “hacia la derecha” absorbe calor y la de flechas “hacia la izquierda” cede calor. Lo cual se lee con claridad en los bloques flechados.⁵

Los puntos A (sustancia fría completamente en estado sólido, en el punto de fusión⁶); y B, (sustancia fría completamente líquida en el punto de fusión) revisten una especial importancia, como se verá, para este análisis riguroso.

Por lo demás, como se sabe, en un problema de este tipo las opciones para la temperatura de equilibrio pueden ser: $T_{eq} < T_{cdf}$; $T_{eq} = T_{cdf}$ y $T_{eq} > T_{cdf}$ (cómo se acaba de mostrar aleatoriamente en la figura 1). Y se sabe igualmente que la expresión concreta para la ecuación adopta “versiones” explícitas distintas, según cada opción.

³Ver el uso habitual del diagrama, por ejemplo, en [1], pág. 567, en particular la figura 17.21

⁴En [4], p. 525, Tipler utiliza la igualdad de calores, como en este artículo, perdido y ganado, ambos positivos, cada uno en un miembro de la igualdad. Pero ahí mismo continúa utilizando el “método” del tanteo

⁵En [3], algo más moderno, los autores usan el eje horizontal para escribir valores de calor, pero sólo usan el diagrama para una sustancia, o para dos que intercambien calor

⁶Podría igualmente tratarse de un cambio de fase líquido-gas y la situación sería completamente análoga.

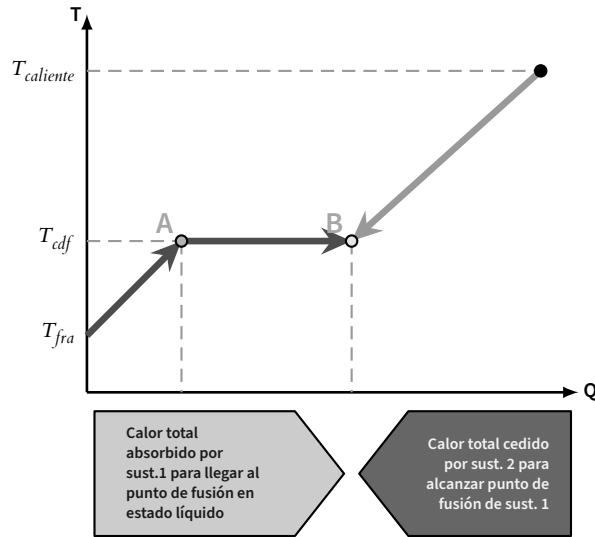


Figura 2. Diagrama T-Q simultáneamente para dos sustancias que intercambian calor

3. Uso de los puntos A y B para discernir la opción válida para la temperatura de equilibrio

En el trabajo, por sencillez, se asume que la sustancia 1 se encuentra en rango de temperaturas que permite cambio de fase y la sustancia 2 se encuentre en un rango en que no cambiara de fase.

3.1 Análisis del punto B (la sustancia fría en estado completamente líquido en el punto de fusión)

Se trata de averiguar si exactamente ese punto es el del estado de equilibrio o no. (figura 2) Calcularíamos:

$$Q(sust,1 : T_f \rightarrow B) \underbrace{[= Q_B^1]}_{\text{para abreviar}} = \underbrace{m_1 c_1(sol.) (T_{cdf} - T_f)}_{Q(sust,1:T_f \rightarrow A)} + \underbrace{m_1 L_{cdf}}_{Q_{cdf}(sust,1:A \rightarrow B)}$$

Y por otro lado:

$$Q(sust. 2: T_c \rightarrow B) [= Q_B^2] = m_2 c_2 (T_c - T_{cdf})$$

Evidentemente, realizado el cálculo, se pueden presentar tres situaciones:

- a) $Q_B^1 = Q_B^2$, que indicaría que el "punto B" corresponder al estado final de equilibrio:
 - la sustancia 1 ha cambiado completamente de fase (sólido a líquido como estamos suponiendo-repitiendo que situación análoga sería si se trata de cambio de líquido a gas)
 - la temperatura final de equilibrio es la del cambio de fase de la sustancia 1; $T_{eq} = T_{cdf}$

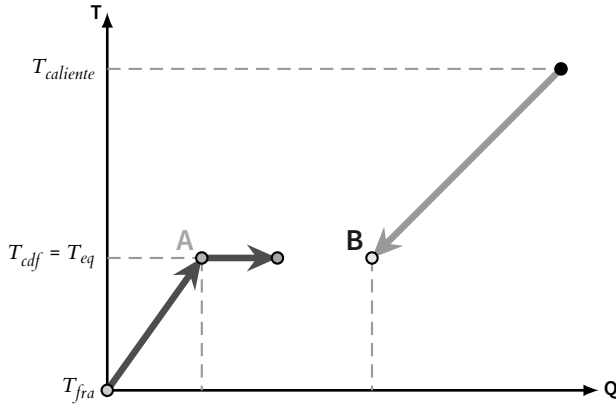


Figura 3. Analisis de punto A en equilibrio

b) $Q_B^1 > Q_B^2$, que indicaría que no hay equilibrio en B y que para que éste se produzca, Q_B^1 ha de disminuir y Q_B^2 ha de aumentar; lo cual desplaza la temperatura de equilibrio “hacia la izquierda de B”, pudiendo ocurrir dos opciones:

1) Equilibrio en un punto entre A y B⁷ (figura 3)

- la sustancia 1 está cambiando de fase, pero este aún no se ha realizado completamente
- la temperatura final de equilibrio es la del cambio de fase de la sustancia 1:
 $T_{eq} = T_{cdf}$

2) Equilibrio “a la izquierda de A”

- La sustancia 1 no ha cambiado de fase: La temperatura final se encuentra en el rango: $T_{fria} < T_{eq} < T_{cdf}$

c) $Q_B^1 < Q_B^2$, que indicaría que tampoco hay equilibrio en B, pero ahora para que éste se de Q_B^1 ha de aumentar y Q_B^2 ha de disminuir.

El equilibrio ocurriría “a la derecha de B” de forma que:

- La sustancia 1 ha cambiado completamente de fase
- La temperatura final se encuentra en el rango: $T_{cdf} < T_{eq} < T_{caliente}$

3.2 Analisis del punto A

(la sustancia fría en estado completamente sólido en el punto de fusión)

- En forma similar al análisis del punto B, procedemos ahora al de A (figura 4): averiguar entonces si A es exactamente el estado de equilibrio o no. Calcularíamos en este caso:

⁷En [5] el autor sí recomienda hacer un análisis previo parecido al propuesto en este artículo, si bien no profundiza ni estudia los distintos casos y, sobre todo, no utiliza el diagrama T – Q en la versión “doble” de este artículo

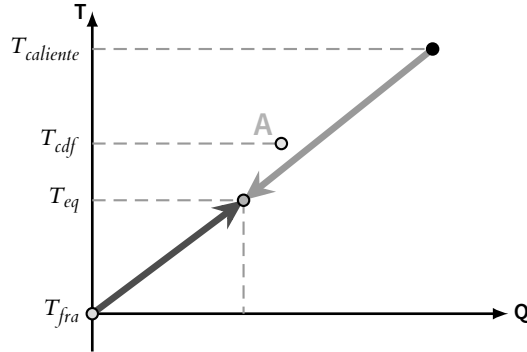


Figura 5. Analisis para punto A

$$Q(\text{sust. 1: } T_{\text{fría}} \rightarrow T_{\text{eq}}) = \underbrace{m_1 c_1 (\text{sól.}) (T_{\text{cdf}} - T_{\text{fr}})}_{Q(\text{sust. 1: } T_{\text{fr}} \rightarrow T_{\text{f}})} + \underbrace{m_1 L_{\text{cdf}}}_{Q_{\text{cdf}}(\text{sust. 1: } A \rightarrow B)} + \underbrace{m_1 c_1 (\text{liq.}) (T_{\text{eq}} - T_{\text{cdf}})}_{Q(\text{sust. 1: } B \rightarrow T_{\text{eq}})}$$

$$Q(\text{sust. 2: } T_{\text{cal}} \rightarrow T_{\text{eq}}) = m_2 c_2 (T_{\text{cal}} - T_{\text{eq}})$$

Que tras la igualación permitirá obtener la temperatura de equilibrio:

$$T_{\text{eq}} = \frac{m_2 c_2 T_{\text{cal}} - m_1 c_1 (\text{sól.}) (T_{\text{cdf}} - T_{\text{fr}}) - m_1 L_{\text{cdf}}}{m_1 c_1 (\text{liq.}) + m_2 c_2} \quad (1)$$

B) Podría ocurrir (figura 3), como segunda opción que, tras los análisis de A y B; se concluyera que el equilibrio se produce “a la derecha de A” y “a la izquierda de B”. Estaríamos entonces en algún punto del tramo horizontal A→B. De ahí, tendríamos:

$$1) T_{\text{eq}} = T_{\text{cdf}}$$

2) La sustancia 1 se encuentra con una parte líquida y una parte que aún es sólida Y cada uno de los miembros de la ecuación de igualdad de calores se leerá:

$$Q(\text{sust. 1: } T_{\text{fría}} \rightarrow T_{\text{eq}}(A)) = m_1 c_1 (\text{sol.}) (T_{\text{cdf}} - T_{\text{fr}}) + \Delta m_1 L_{\text{cdf}}$$

(siendo Δm_1 la cantidad de sustancia 1 que se habra licuado) y $Q(\text{sust. 2: } T_{\text{cal}} \rightarrow T_{\text{eq}}) = m_2 c_2 (T_{\text{cal}} - T_{\text{cdf}})$

En este caso, la incógnita típica a calcularlo que en los problemas típicos es Δm_1 (la temperatura de equilibrio es la del cambio de fase). Su valor es:

$$\Delta m_1 = \frac{m_2 c_2 (T_{\text{cal}} - T_{\text{cdf}}) - m_1 c_1 (\text{sol.}) (T_{\text{cdf}} - T_{\text{fr}})}{L_{\text{cdf}}}$$

c) Finalmente, si el análisis de A concluye “a la izquierda de A” (figura5), tendremos $T_{eq} < T_{cdf}$ y la igualdad de calores será:

$Q(sust,1 : T_{fria} \rightarrow T_{eq}) = m_1 c_1 (T_{eq} - T_{fr})$ y $Q(sust,2 : T_{cal} \rightarrow T_{eq}) = m_2 c_2 (T_{cal} - T_{eq})$, tal que, tras igualar:

$$T_{eq} = \frac{m_2 c_2 T_{cal} + m_1 c_1 (sól.) T_{fr}}{m_2 c_2 + m_1 c_1 (sól.)} \quad (2)$$

4. Condiciones sobre las cantidades de las sustancias que intercambian calor para la ubicación de la temperatura de equilibrio en los distintos rangos posibles.

1. **Rango** $T_{cdf} < T_{eq} < T_{cal}$

Para esta primera opción, ha de cumplirse que: $Q_B^1 < Q_B^2$ (ver figura 1 y seccion 3.2 inciso c), esto es: $m_1 c_1 (sól.) (T_{cdf} - T_{fr}) + m_1 L_{cdf} < m_2 c_2 (T_{cal} - T_{cdf})$, qu equivale a:

$$\frac{m_1}{m_2} < \frac{c_2 (T_{cal} - T_{cdf})}{c_1 (sól.) (T_{cdf} - T_{fr}) + L_{cdf}} \quad (3)$$

2) **“Rango”:** $T_{cdf} = T_{eq}$

En este caso se puede dar una gama de posibilidades cuyos “límites” los imponen las dos condiciones posibles de igualdad de calores: (sección 3.1 inciso a y sección 3.2 inciso b)

- Condición límite la sustancia 1 se licúa completamente manteniéndose $T_c = T_{cdf}$, es decir:

$$Q_B^1 = Q_B^2 : m_1 c_1 (sól.) (T_{cdf} - T_f) + m_1 L_{cdf} = m_2 c_2 (T_c - T_{cdf}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{c_2 (T_c - T_{cdf})}{c_1 (sól.) (T_{cdf} - T_f) + L_{cdf}}$$

- Condición límite la sustancia 1 no se licúa en absoluto manteniéndose $T_c = T_{cdf}$, es decir:

$$Q_A^1 = Q_A^2 (\equiv Q_B^2) : m_1 c_1 (sól.) (T_{cdf} - T_f) = m_2 c_2 (T_c - T_{cdf}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{c_2 (T_c - T_{cdf})}{c_1 (sól.) (T_{cdf} - T_f)}$$

De ahí que la gama de opciones (correspondiente a los distintos valores posibles de Δm_1) quedará señalada de modo que el cociente $\frac{m_1}{m_2}$ se mantenga entre:

$$\frac{c_2 (T_c - T_{cdf})}{c_1 (sól.) (T_{cdf} - T_f) + L_{cdf}} \leq \frac{m_1}{m_2} \leq \frac{c_2 (T_c - T_{cdf})}{c_1 (sól.) (T_{cdf} - T_f)} \quad (4)$$

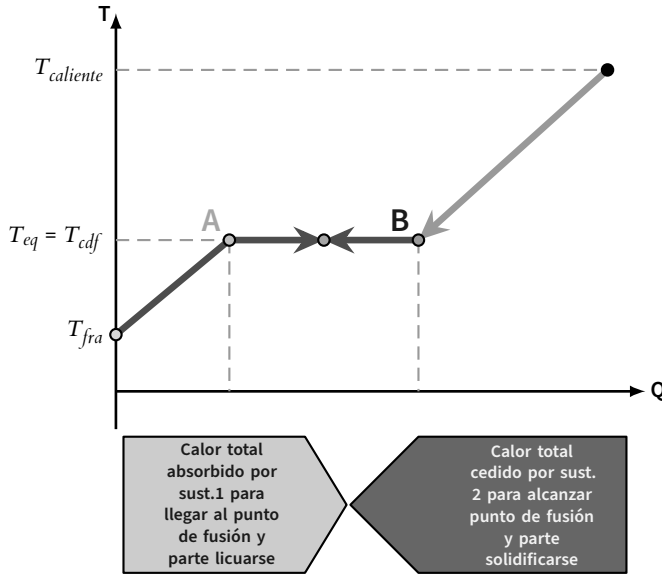


Figura 6. Diagrama de temperatura de ambas sustancias

3) **Rango** $T_{fr} < T_{eq} < T_{cdf}$

Ahora se trata de que: $Q_A^1 > Q_B^2 (\equiv Q_B^1)$ (ver sección 3.2 inciso a). Esto es: $m_1 c_1(sol.) (T_{cdf} - T_f) > m_2 c_2 (T_c - T_{cdf})$ lo que supone, que para el cociente $\frac{m_1}{m_2}$:

$$\frac{m_1}{m_2} > \frac{c_2 (T_c - T_{cdf})}{c_1(sol.) (T_{cdf} - T_f)} \quad (5)$$

5. **Caso de que ambas sustancias sean iguales: m_1 a T_f y m_2 a T_c con $T_f < T_{cdf} < T_c$**

La diferencia en una situación así radica en que ambas sustancias pueden sufrir el cambio de fase (por ejemplo: la 1, de sólido a líquido y la 2, de líquido a sólido, y ambas con el mismo calor de cambio de fase). Se puede ver en la figura 6, lo más característico de este caso: si la opción correspondiera a $T_{cdf} = T_{equil}$, la sustancia caliente y la sustancia fría experimentarían cambios de fase. Las otras opciones para el rango posible para la temperatura de equilibrio son similares al caso anterior, salvo unas pequeñas diferencias.

Veamos rápidamente las tres situaciones posibles:

A) $T_{cdf} > T_{eq} > T_{cal}$, para lo cual es necesario que:

$Q_B^1 < Q_B^2$; que equivale a una relación ente masas -realizan- do, para ello, un cálculo similar a lo hecho antes:

$$\frac{m_1}{m_2} < \frac{c_1(liq.) (T_{cal} - T_{cdf})}{c_1(sól.) (T_{cdf} - T_{fr}) + L_{cdf}} \quad (6)$$

Y, para que el equilibrio de igualdad de calores será:

$$m_1 c_{1(\text{sól.})}(T_{\text{cdf}} - T_f) + m_1 L_{\text{cdf}} + m_1 c_{1(\text{liq.})}(T_{\text{eq}} - T_{\text{cdf}}) = m_2 c_{1(\text{liq.})}(T_{\text{cal}} - T_{\text{eq}})$$

y de ahí:

$$T_{\text{eq}} = \frac{m_2 c_{1(\text{liq.})} T_{\text{cal}} - m_1 c_{1(\text{sól.})}(T_{\text{cdf}} - T_f) - m_1 L_{\text{cdf}}}{c_{1(\text{liq.})}(m_1 + m_2)}$$

- b) $T_{\text{fr}} < T_{\text{eq}} < T_{\text{cdf}}$, obligado si: $Q_A^1 > Q_A^2$ (Entonces, la sustancia 2 se solidificará y cederá también calor a la sustancia fría debido a ese cambio de fase):

$$\frac{m_1}{m_2} > \frac{c_{1(\text{liq.})}(T_{\text{cal}} - T_{\text{cdf}}) + L_{\text{cdf}}}{c_{1(\text{sól.})}(T_{\text{cdf}} - T_{\text{fr}})} \tag{7}$$

El valor de T_{eq} que se obtendrá en el equilibrio, tras igualar calores: $m_1 c_{1(\text{sól.})}(T_{\text{eq}} - T_f) = m_2 c_2(T_{\text{cdf}} - T_{\text{eq}}) + m_2 L_{\text{cdf}} + m_2 c_{1(\text{liq.})}(T_{\text{cal}} - T_{\text{cdf}})$

$$T_{\text{eq}} = \frac{m_2 c_{1(\text{liq.})} T_{\text{cdf}} + m_2 L_{\text{cdf}} + m_2 c_{1(\text{liq.})}(T_{\text{cal}} - T_{\text{cdf}}) + m_1 c_{1(\text{sól.})} T_f}{c_{1(\text{sól.})}(m_1 + m_2)}$$

- c) $T_{\text{eq}} = T_{\text{cdf}}$. En esta situación ocurre que:

$Q(\text{sus},1 : T_{\text{fr}} \rightarrow B)[= Q_B^1] \leq Q(\text{sust},2 : T_{\text{cal}} \rightarrow B)[= Q_B^2]$ (que implica equilibrio a la “izquierda” de B) y a la vez: $Q(\text{sus},1 : T_{\text{fr}} \rightarrow A)[= Q_A^1] \leq Q(\text{sust},2 : T_{\text{cal}} \rightarrow A)[= Q_A^2]$ (que supone equilibrio “a la derecha de A”. En fin equilibrio en el tramo $A \rightarrow B$, en que se produce el cambio de fase)

O sea:

$Q_A^1 \leq Q_A^2$ se escribe como:

$$\frac{Q(\text{sust. 1 (sól.)}; T_f - T_{\text{cdf}})}{m_1 c_{1(\text{sól.})}}(T_{\text{cdf}} - T_f) \leq m_2 c_{1(\text{liq.})}(T_{\text{cal}} - T_{\text{cdf}}) + \frac{Q(\text{sust. 2 (liq.-sól.)})}{m_2 L_{\text{cdf}}}$$

O bien:

$$\frac{m_1}{m_2} \leq \frac{c_{1(\text{liq.})}(T_{\text{cal}} - T_{\text{cdf}}) + L_{\text{cdf}}}{c_{1(\text{sól.})}(T_{\text{cdf}} - T_{\text{fr}})}$$

$Q_B^1 \geq Q_B^2$ se escribe como:

$$\frac{Q(\text{sust. 1: sól.}, T_{\text{fr}} - T_{\text{cdf}})}{m_1 c_{1(\text{sól.})}(T_{\text{cdf}} - T_{\text{fr}})} + \frac{Q(\text{sust. 1: liq.})}{m_1 L_{\text{cdf}}} \geq \frac{Q(\text{sust. 2: liq.})(T_{\text{cal}} - T_{\text{cdf}})}{m_2 c_{1(\text{liq.})}(T_{\text{cal}} - T_{\text{cdf}})}$$

O bien:

$$\frac{m_1}{m_2} \geq \frac{c_{1(\text{liq.})}(T_{\text{cal}} - T_{\text{cdf}})}{c_{1(\text{sól.})}(T_{\text{cdf}} - T_{\text{fr}}) + L_{\text{cdf}}}$$

Que en forma compacta equivale a:

$$\boxed{\frac{c_{1(\text{liq.})}(T_{\text{cal}} - T_{\text{cdf}})}{c_{1(\text{sól.})}(T_{\text{cdf}} - T_{\text{fr}}) + L_{\text{cdf}}} \leq \frac{m_1}{m_2} \leq \frac{c_{1(\text{liq.})}(T_{\text{cal}} - T_{\text{cdf}}) + L_{\text{cdf}}}{c_{1(\text{sól.})}(T_{\text{cdf}} - T_{\text{fr}})}} \quad (8)$$

En esta situación la igualación de calores introduce en cada término un sumando tipo ΔmL_{cdf} , de modo que colocados ambos en el primer miembro (el miembro correspondiente a calor absorbido) se leerán como: $(\Delta m_{1(\text{sol} \rightarrow \text{liq})} - \Delta m_{2(\text{sol} \rightarrow \text{liq})})L_{\text{cdf}}$, lo cual (salvo el factor L_{cdf}) representa la cantidad neta de sustancia adicional que se hace líquida (factor entre paréntesis sale positivo) o cantidad neta de sustancia adicional que se hace sólida (factor entre paréntesis sale negativo)

6. Un ejemplo practico

En un recipiente de masa despreciable, se mezclan:

- Opción A: 0.14 kg de hielo a -15°C a 0.190 kg de agua a -35°C ,
- Opción B: masa inicial de hielo a -15°C , 60g y masa inicial de agua a 35°C , 270g,
- Opción C: masa inicial de hielo a -15°C , 840g y masa inicial de agua a 35°C , 40 g,

y no se pierde calor al entorno. a) ¿A qué temperatura final llega la mezcla?, b) A esa temperatura, ¿cuantos gramos hay de agua y cuantos de hielo?

Como se ha visto y se muestra en las (figuras 7 y 8), este proceso “riguroso” supone evaluar las cantidades: $(Q_B^1, Q_B^2, Q_A^1 \text{ y } Q_A^2)$ y compararlas.

Recordamos para ello que:

- $Q_B^1 = m_1 c_{1(\text{sól.})}(T_{\text{cdf}} - T_f) + m_1 L_{\text{cdf}}$
- $Q_B^2 = m_2 c_{2(\text{liq.})}(T_{\text{cal}} - T_{\text{cdf}})$
- $Q_A^1 = m_1 c_{1(\text{sól.})}(T_{\text{cdf}} - T_f)$
- $Q_A^2 = m_2 c_{2(\text{liq.})}(T_{\text{cal}} - T_{\text{cdf}}) + m_2 L_{\text{cdf}}$

Veamos entonces, los resultados, a partir de los valores de los calores específicos de agua e hielo y los datos para cada opción:

Opción A:

- $Q_B^1 = 51,170\text{J}; \quad Q_B^2 = 51,170\text{J}$, que nos señala: $Q_B^1 > Q_B^2$; equilibrio a la “izquierda” de B
- $Q_A^1 = 4,410\text{J}; \quad Q_A^2 = 91,323,5\text{J}$, que nos señala: $Q_A^1 < Q_A^2$; equilibrio a la “derecha” de A

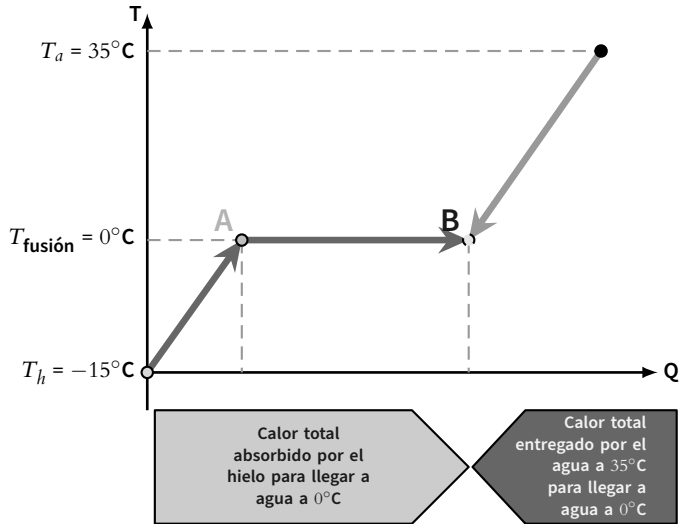


Figura 7. Análisis del punto B

a) Es decir, equilibrio entre A y B, luego $T_{eq} = 0^\circ\text{C}$

b) De igualdad de calores:

$$Q(h : -15^\circ\text{C} \rightarrow 0^\circ\text{C}) + \Delta m_{h \rightarrow a} L_f = Q(a : 35^\circ\text{C} \rightarrow 0^\circ\text{C}) + \Delta m_{a \rightarrow h} L_f$$

Llegamos a que: $4,410 + \Delta m_{\text{agua}} * 334,000 = 27,863,5 \Rightarrow \Delta m_{\text{agua}} = \frac{27863,5 - 4410}{334000} = 70\text{g}$

Y con ello a: masa total de agua líquida = $m_{\text{inicial}}^{\text{agua}} + \Delta m_{\text{agua}} = 190 + 70 = 260\text{g}$

Masa total de hielo = $m_{\text{inicial}}^{\text{hielo}} - \Delta m_{\text{agua}} = 140 - 70 = 70$

Opción B:

$Q_B^1 = 21,930\text{ J}; \quad Q_B^2 = 39,595,5\text{ J}$, que nos señala:

$Q_B^1 < Q_B^2$; equilibrio a la "derecha" de B.

a) En este caso ya no necesitamos analizar el punto A; la igualdad de calores nos arroja:

$$Q(a : -35^\circ\text{C} \rightarrow T_{eq}) = Q(h : -15^\circ\text{C} \rightarrow 0^\circ\text{C}) + Q(h : 0 \rightarrow a : 0) + Q(a_{\text{prov hielo}} : 0 \rightarrow T_{eq})$$

o bien:

$$0,27 * 4190 * (35 - T_{eq}) = 0,06 * 2100 * 15 + 0,06 * 334,000 + 0,06 * 4190 * T_{eq}$$

que, tras despejar da:

$$T_{eq} \approx 12,8^\circ\text{C}$$

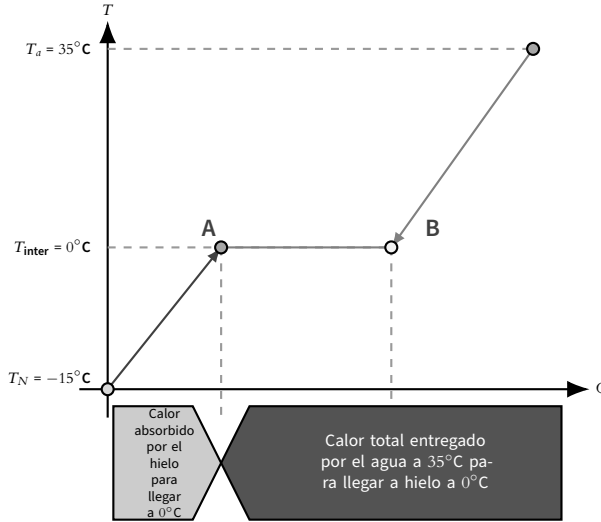


Figura 8. Análisis del punto A

b) Las cantidades finales de agua y hielo por evidentes las omitimos.

Opción C:

- $Q_B^1 = 283220 \text{ J}$; $Q_B^2 = 5,866 \text{ J}$, que nos señala: $Q_B^1 > Q_B^2$; equilibrio a la “izquierda” de B.
- $Q_A^1 = 26,460 \text{ J}$; $Q_A^2 = 19,226 \text{ J}$, que nos señala: $Q_A^1 > Q_A^2$; equilibrio a la “izquierda” de A.

Igualdad de calores:

$$Q(a : -35 \rightarrow 0) + Q(a : 0 \rightarrow h : 0) + Q(h_{prov. \text{ agua}} : 0 \rightarrow T_{eq}) = Q(h : -15^\circ\text{C} \rightarrow T_{eq})$$

Es decir:

$$0,04 * 35 * 4190 + 0,04 * 334,000 + 0,04 * 2100 * T_{eq} = 0,84 * 2100 * (T_{eq} - (-15))$$

En fin (y también omitimos cantidades finales de agua y hielo): $T_{eq} \approx -4,3^\circ\text{C}$. También para cada opción, podríamos aplicar (6), (7) y (8) a fin de seleccionar el rango adecuado de temperaturas en que se produce el equilibrio. Veamos:

Opción A:

$$\frac{m_1(\text{hielo})}{m_2(\text{agua})} = \frac{0,14}{0,19} \approx 0,737 \left\{ \begin{array}{l} \text{Aplic. (6): } \frac{m_1}{m_2} < 0,401 : \text{ Imposible que } T_{cdf} < T_{eq} < T_{cal} \\ \text{Aplic. (7): } \frac{m_1}{m_2} > 15,25 : \text{ Imposible que } T_{fr} < T_{eq} < T_{cdf} \\ \text{Aplic. (8): } 0,401 < \frac{m_1}{m_2} (= 0,737) < 15,25 : \text{ correcto: } T_{eq} = T_{cdf} \end{array} \right.$$

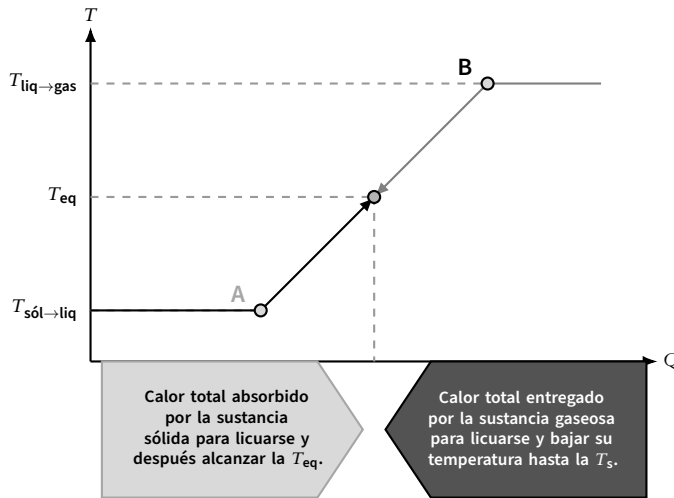


Figura 9. Sust. líquida con gaseosa

Opción B:

$$\frac{m_1(\text{hielo})}{m_2(\text{agua})} = \frac{0,14}{0,19} \approx 0,22 \left\{ \begin{array}{l} \text{Aplic. (6): } \frac{m_1}{m_2} (0,22) < 0,401 : \text{ Lo correcto: } T_{cdf} < T_{eq} < T_{cal} \\ \text{Aplic. (7): } \frac{m_1}{m_2} > 15,25 : \text{ Imposible que } T_{fr} < T_{eq} < T_{cdf} \\ \text{y aplic. (8): } 0,401 < \frac{m_1}{m_2} < 15,25 : \text{ Imposible que } T_{eq} = T_{cdf} \end{array} \right.$$

Opción C:

$$\frac{m_1(\text{hielo})}{m_2(\text{agua})} = \frac{0,84}{0,04} = 21 \left\{ \begin{array}{l} \text{Aplic. (6): } \frac{m_1}{m_2} < 0,401 : \text{ Imposible que } T_{cdf} < T_{eq} < T_{cal} \\ \text{Aplic. (7): } \frac{m_1}{m_2} (= 21) > 15,25 : \text{ Lo correcto: } T_{fr} < T_{eq} < T_{cdf} \\ \text{y aplic. (8): } 0,401 < \frac{m_1}{m_2} < 15,25 : \text{ Imposible que } T_{eq} = T_{cdf} \end{array} \right.$$

7. Otros ejemplos entre muchos

En las figuras 9 y 10 se muestran ejemplos ilustrativos.

8. Conclusiones

Es, pues, muy recomendable realizar este análisis previo de calores necesarios para alcanzar estos llamados “puntos A y B” (que podrían ser más, como se muestra en la figura 10 ya que se ahorra mucho tiempo de cálculo quizá inútil y se ofrece un modo riguroso de búsqueda del rango de temperaturas en que se produce el equilibrio.

Pedagógicamente también es bastante conveniente, pues se muestra al estudiante un camino de solución en cierta medida más creíble, por decirlo así, como “más serio”.

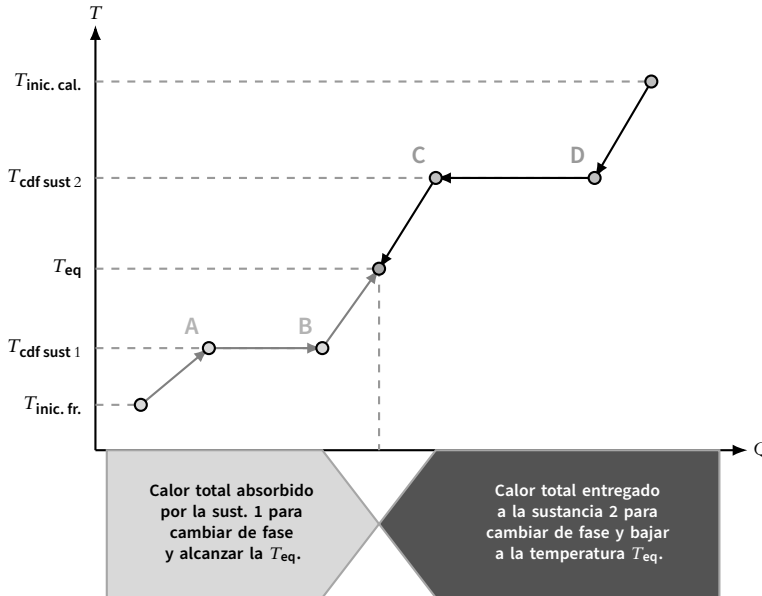


Figura 10. Dos cambios de fase: cuatro puntos de análisis previo

De la bibliografía consultada, sólo Giancoli ofrece un camino en cierta medida parecido, aunque con menor profundización y análisis de lo aquí mostrado.

Contribución de autoría: F.G.A.: Conceptualización, metodología, análisis formal, investigación, validación, visualización, redacción del borrador original, revisión y edición del manuscrito.

Conflictos de interés: Los autores declaran no tener conflictos de interés.

Disponibilidad de datos y materiales: No aplica.

Declaración del Comité de Ética Institucional: No aplica.

Declaración de consentimiento informado: No aplica.

Financiamiento: No hubo financiamiento externo.

Referencias

- [1] Sears FW, Zemansky MW, Young HD y Freedman RA. *Física Universitaria*. 13.^a ed. Vol. 1. México: Pearson, 2013.
- [2] Halliday D, Resnick R y Krane KS. *Física*. 4.^a ed. Vol. 1. México: John Wiley & Sons, 2001.
- [3] Serway RA y Jewett JW. *Física para Ciencias e Ingeniería*. 9.^a ed. Vol. 1. México: Cengage Learning, 2008.
- [4] Tipler PA. *Física para la Ciencia y la Tecnología*. 5.^a ed. Vol. 1. Barcelona: Reverté, 2005.
- [5] Giancoli DC. *Física para Ciencias e Ingeniería*. 4.^a ed. Vol. 1. México: Pearson Prentice Hall, 2008.