

ARTÍCULO ORIGINAL

# Estudio e implementación del método multiescala generalizado (GMsFEM)

## *A Review and Implementation of the Generalized Multiscale Method (GMsFEM)*

A. Forero-Laiton <sup>1</sup>, Y. Sarmiento-Perdomo <sup>2,\*</sup> y Y. Trujillo-Ladino <sup>1</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia – sede Bogotá. Bogotá 111321, Colombia  
Correo electrónico: anforerol@unal.edu.co (A.F.L.); ytrujillo@unal.edu.co (Y.T.L.)

<sup>2</sup>Escuela de Matemáticas y Ciencias de la Computación, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de Honduras – Ciudad Universitaria. Tegucigalpa 11101, Honduras

Correo electrónico: yesy.sarmiento@unah.hn (Y.S.P.)

\*Autor de correspondencia

Recibido: 15 de septiembre de 2025; Revisado: 19 de diciembre de 2025; Aceptado: 5 de mayo de 2026; Publicado: 20 de junio de 2026

### Resumen

El presente artículo tiene como objetivo estudiar y aplicar tres métodos numéricos para la solución de ecuaciones diferenciales parciales elípticas: el método de elementos finitos (FEM), el método multiescala de elementos finitos (MsFEM) y el método multiescala generalizado de elementos finitos (GMsFEM), con énfasis en este último. Para ello, se desarrolla una revisión teórica de sus fundamentos variacionales y matriciales, y posteriormente se implementan ejemplos computacionales asociados a problemas de difusión homogénea, heterogénea y de alto contraste. Las simulaciones fueron realizadas mediante FreeFem++ y MATLAB, lo que permitió comparar el comportamiento de los métodos en distintos escenarios. Los resultados muestran que el método multiescala clásico presenta limitaciones cuando el problema involucra medios con fuertes heterogeneidades o escalas no separables, mientras que el método multiescala generalizado logra una mejor representación del comportamiento local mediante la construcción de funciones base obtenidas a partir de problemas espectrales locales. Se concluye que este último método constituye una alternativa más adecuada para la aproximación numérica de problemas multiescala complejos, especialmente en contextos de alto contraste, donde se requiere reducir grados de libertad sin perder de manera significativa la calidad de la aproximación.

**Palabras clave:** ecuaciones diferenciales parciales; método de elementos finitos; método multiescala; método multiescala generalizado; problemas de difusión; medios heterogéneos.

### Abstract

The aim of this article is to study and apply three numerical methods for solving elliptic partial differential equations: the finite element method (FEM), the multiscale finite element method (MsFEM), and the generalized multiscale finite element method (GMsFEM), with special emphasis on the latter. To this end, a theoretical review of their variational and matrix foundations is presented, followed by computational implementations for homogeneous, heterogeneous, and high-contrast diffusion problems. The simulations were carried out using FreeFem++ and MATLAB, which made it possible to compare the performance of the methods under different scenarios. The results show that the classical multiscale method has limitations when the problem involves highly heterogeneous media or non-separable scales, whereas the generalized multiscale method provides a better representation of local behavior through the construction of basis functions obtained from local spectral problems. It is concluded that this latter method is a more suitable alternative for the numerical approximation of complex multiscale problems, especially in high-contrast settings, where reducing degrees of freedom is required without significantly compromising approximation quality.

**Keywords:** partial differential equations; finite element method; multiscale method; generalized multiscale method; diffusion problems; heterogeneous media.

## 1. Introducción

El método de elementos finitos (FEM) constituye uno de los enfoques más utilizados para la aproximación numérica de ecuaciones diferenciales parciales (EDPs), en particular en problemas elípticos y de difusión. Su idea central consiste en reemplazar el problema continuo por una formulación variacional y, posteriormente, discretizar el dominio mediante una partición en elementos finitos, sobre la cual se construye un espacio aproximante de dimensión finita. De este modo, el problema original se transforma en un sistema algebraico, cuyo nivel de exactitud depende de la malla y del espacio discreto empleado. En general, mejorar dicha aproximación exige refinamientos progresivos de malla, lo que incrementa de manera significativa el costo computacional [1–3].

Sin embargo, cuando el medio presenta heterogeneidades finas o variaciones en múltiples escalas espaciales, el uso directo de FEM puede resultar ineficiente, ya que para resolver adecuadamente la dinámica microscópica se requieren mallas extremadamente refinadas. Esta dificultad es especialmente relevante en problemas de difusión en medios heterogéneos, flujo en medios porosos y modelos con coeficientes altamente oscilatorios, donde la escala fina influye de forma decisiva en el comportamiento macroscópico de la solución. Para abordar este tipo de situaciones, se desarrolló el método multiescala de elementos finitos (MsFEM), cuya idea esencial es incorporar información de la microestructura en funciones base construidas a partir de problemas locales. Con ello, el método permite capturar efectos de submalla sobre una discretización gruesa, reduciendo grados de libertad y conservando una buena calidad de aproximación [4–6].

No obstante, en escenarios más complejos, como aquellos con escalas no separables, fuertes contrastes en los coeficientes o múltiples canales de conectividad local, una sola función base por nodo o por elemento suele ser insuficiente para representar adecuadamente

la solución. En este contexto surge el método generalizado multiescala de elementos finitos (GMsFEM), que extiende la filosofía del MsFEM mediante una construcción sistemática de espacios multiescala enriquecidos. En GMsFEM, se generan primero espacios locales ricos (snapshot spaces) y luego se seleccionan funciones base relevantes resolviendo problemas espectrales locales, lo que permite construir espacios reducidos en malla gruesa capaces de capturar estructuras complejas del problema original [7–9]. Esta estrategia hace posible adaptar la dimensión del espacio multiescala a la complejidad local del medio, mejorando la robustez y la precisión en medios heterogéneos y de alto contraste [7, 10].

Uno de los rasgos distintivos de GMsFEM es la forma en que se seleccionan las funciones base multiescala. En lugar de fijar de antemano una única función por nodo, el método construye primero un conjunto local de funciones candidatas y, posteriormente, selecciona las más relevantes mediante problemas espectrales planteados en cada vecindad de la malla gruesa. Con ello, es posible conservar las funciones espectrales más relevantes que mejor representan la estructura local del medio y descartar aquellas cuya contribución a la aproximación global es menos significativa. Esta selección permite adaptar el espacio aproximante a la heterogeneidad del problema y mejorar el comportamiento del método en escenarios de alto contraste [7–9].

Además, la literatura reciente muestra que GMsFEM no solo constituye una mejora conceptual respecto a MsFEM, sino también una plataforma flexible para el tratamiento de formulaciones mixtas y problemas aplicados. Existen extensiones a métodos mixtos que preservan propiedades de conservación local, fundamentales en problemas de flujo en medios porosos [9, 11]; asimismo, se ha aplicado con éxito en medios fracturados, modelos multicontinuo, propagación de ondas elásticas y ecuaciones parabólicas con heterogeneidad espacio-temporal [2, 6, 12–14]. En conjunto, estos desarrollos muestran que GMsFEM ofrece un marco sólido y versátil para resolver problemas multiescala donde los enfoques clásicos resultan prohibitivos o insuficientes.

En este trabajo se estudian el FEM, el MsFEM y el GMsFEM como herramientas para la resolución de ecuaciones diferenciales parciales, con énfasis en la comparación conceptual y computacional entre estos enfoques. En particular, se presentan los fundamentos básicos de cada método y se desarrollan ejemplos numéricos que permiten ilustrar su implementación y analizar su desempeño en problemas de difusión homogénea, heterogénea y de alto contraste. Con ello, se busca mostrar de manera progresiva cómo la incorporación de bases multiescala y, en particular, el enriquecimiento sistemático propuesto por GMsFEM, permite mejorar la capacidad de aproximación en problemas donde la presencia de múltiples escalas desempeña un papel esencial.

## 2. Conceptos previos

En esta sección se introducen los conceptos de análisis funcional y de ecuaciones diferenciales parciales que son esenciales para el desarrollo y entendimiento de los tres métodos expuestos en este artículo. En específico, se presentan los espacios y formas bilineales, fundamentales para la formulación y solución de problemas en el contexto del Método de Elementos Finitos Multiescala, así como los distintos tipos de difusión, los cuales son cruciales para la elaboración de ejemplos a lo largo del artículo. El material aquí presentado fue tomado

de [15–19].

## 2.1 Espacios

Los espacios de Sóbolev son adecuados para formular el método de elementos finitos, ya que permiten plantear ecuaciones en derivadas parciales elípticas desde un enfoque variacional. En este marco, la solución buscada es la que minimiza una cantidad que representa la física del problema. Dichos problemas variacionales se resuelven en espacios de funciones que cumplen condiciones de regularidad y comportamiento específicas, ver [17, 18].

**Definición 2.1.** *Un espacio de Sóbolev es un espacio vectorial normado de funciones, que puede verse como un subespacio de un espacio  $L_p$ . dado un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  el espacio de Sóbolev  $W^{m,p}(\Omega)$  se define como*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L_p(\Omega) \mid D^\alpha f \in L_p(\Omega), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{N} : |\alpha| \leq m\}, \quad (1)$$

donde  $D^\alpha f$  denota las derivadas parciales débiles de  $f$  en la ecuación (1), es decir,

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Es claro que  $W^{m,p}(\Omega) \subset L_p(\Omega)$ .

**Definición 2.2.** *La norma del espacio de Sóbolev se define a partir de la norma  $\|\cdot\|_{L_p(\Omega)}$  del espacio  $L_p$ , tal como se muestra en la ecuación 2.*

$$\|f\|_{m,p} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \text{ si } 1 \leq p < \infty. \quad (2)$$

Los espacios de Sóbolev con  $p = 2$  tienen la misma estructura de un espacio de Hilbert, observe que  $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ , donde el producto interno se define a partir del producto interno de  $L_2$  tal como se presenta en la ecuación 3.

$$(f, g)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha f, D^\alpha g)_{L^2(\Omega)}. \quad (3)$$

Se define el espacio  $H_0^m(\Omega)$  de la siguiente manera:  $H_0^m(\Omega) = \overline{H^m(\Omega) \cap C_0^\infty(\Omega)}$ , ver [18].

Las norma y seminorma de los espacios de Sobolev  $H^k(\Omega)$  son presentados en la ecuación 4.

$$|0u|_{0,k,\Omega} = \left( \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u|^2 \right)^{1/2}, \quad |u|_{k,\Omega} = \left( \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u|^2 \right)^{1/2}. \quad (4)$$

## 2.2 Formas bilineales

A continuación, se presentan las nociones básicas sobre formas bilineales necesarias para el desarrollo de las formulaciones variacionales y matriciales de los métodos estudiados, con base en [19, 20].

**Definición 2.3.** *Sea  $K$  un cuerpo y  $V$  un  $K$ -espacio vectorial, una forma bilineal es una aplicación  $f : V \times V \rightarrow K$  que satisface las siguientes propiedades:*

- $f(u_1 + u_2, v) = f(u_1, v) + f(u_2, v)$ .
- $f(u, v_1 + v_2) = f(u, v_1) + f(u, v_2)$ .
- $f(au, v) = af(u, v)$ .
- $f(u, av) = af(u, v)$ .

para todo  $a \in K, u, v, u_1, u_2, v_1, v_2 \in V$ .

**Definición 2.4.** *Una forma bilineal simétrica es aquella que es conmutativa, es decir,  $f(u, v) = f(v, u)$ .*

**Definición 2.5.** *Toda forma bilineal se puede expresar de manera matricial.*

*Sea  $K$  un cuerpo y  $V$  un espacio vectorial, consideremos  $f : V \times V \rightarrow K$  una forma bilineal y una base  $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  del espacio vectorial  $V$  de dimensión finita, la ecuación 5 define la matriz asociada a la forma  $f$  respecto de la base  $B$ .*

$$A = \begin{pmatrix} f(e_1, e_1) & f(e_1, e_2) & \cdots & f(e_1, e_n) \\ f(e_2, e_1) & f(e_2, e_2) & \cdots & f(e_2, e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(e_n, e_1) & f(e_n, e_2) & \cdots & f(e_n, e_n) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

**Proposición 2.1.** *Sea  $f : V \times V \rightarrow K$  una forma bilineal y una base  $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  del espacio vectorial  $V$ , la imagen de  $f$  de los vectores  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  y  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  se presenta en la ecuación 6.*

$$f(u, v) = u^t \cdot A \cdot v = (u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n) \cdot \begin{pmatrix} f(e_1, e_1) & f(e_1, e_2) & \cdots & f(e_1, e_n) \\ f(e_2, e_1) & f(e_2, e_2) & \cdots & f(e_2, e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(e_n, e_1) & f(e_n, e_2) & \cdots & f(e_n, e_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Algunas consecuencias de la proposición anterior son las siguientes:

- Una forma bilineal es simétrica si y sólo si su matriz en una base cualquiera es simétrica.
- Si se fija la base  $B$  y la forma bilineal  $f$ , entonces la matriz  $A$  que hace  $f(u, v) = u^t Av$  para todo  $u, v$  es única.

### 2.3 Tipos de difusión

La ecuación de difusión considerada en este trabajo surge de combinar una ley constitutiva de flujo con un principio de balance. En particular, el término  $-k(x)\nabla u(x)$  representa el flujo asociado a la variable  $u$ , mientras que el operador divergencia mide la variación neta de dicho flujo dentro del dominio [21-23]. De este modo, la ecuación

$$-\operatorname{div}(k(x)\nabla u(x)) = f(x), \quad x \in D \subset \mathbb{R}^2, \quad (7)$$

modela la distribución espacial de una cantidad difusiva en presencia de fuentes o sumideros representados por  $f(x)$  [21, 24, 25]. En este contexto, la forma del coeficiente de difusión  $k(x)$  determina el tipo de difusión que describe el modelo, tal como se muestra a continuación:

- Si  $k(x) = \begin{pmatrix} k_{11}(x) & k_{12}(x) \\ k_{12}(x) & k_{22}(x) \end{pmatrix}$  es una matriz simétrica definida positiva, el modelo describe una difusión anisotrópica.
- Si  $k(x) = \begin{pmatrix} k_{11}(x) & 0 \\ 0 & k_{22}(x) \end{pmatrix}$  con  $k_{11}(x) \neq k_{22}(x)$ , el modelo describe una difusión ortotrópica.
- Si  $k(x) = \begin{pmatrix} k_{11}(x) & 0 \\ 0 & k_{11}(x) \end{pmatrix}$ , el modelo describe una difusión isotrópica.
- Si  $k(x) = C$ , donde  $C$  es una constante, se tiene difusión homogénea.
- Si  $k(x)$  no es constante en el dominio, se tiene difusión heterogénea.

### 3. Método de elementos finitos (FEM)

En esta sección se presenta una introducción al método de elementos finitos en dos dimensiones, junto con un ejemplo computacional que ilustra su desempeño. La exposición se basa en [17, 18].

La idea central del método consiste en aproximar la solución  $u : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mediante una combinación lineal finita de funciones base, tal como se muestra en la ecuación 8:

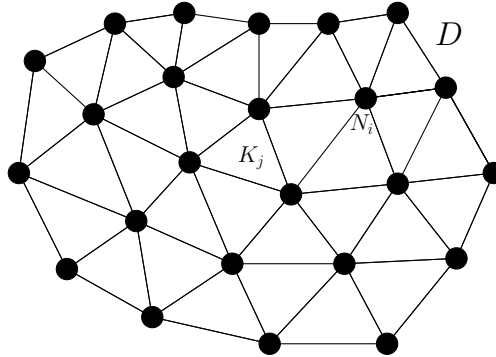
$$u(x) \simeq \beta_0\varphi_0(x) + \beta_1\varphi_1(x) + \dots + \beta_n\varphi_n(x). \quad (8)$$

Para construir esta aproximación, se parte del siguiente problema de difusión:

$$(S) \begin{cases} \text{Encontrar } u : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que:} \\ -\operatorname{div}(k(x)\nabla u(x)) = f(x), & \text{para todo } x \in D, \\ u(x) = g(x), & \text{para todo } x \in \partial D. \end{cases} \quad (9)$$

La formulación anterior está planteada en forma fuerte, lo que supone que la solución posee derivadas suficientes para que la ecuación se satisfaga puntualmente. Sin embargo, para fines numéricos resulta más conveniente trabajar con una formulación equivalente en sentido variacional, ya que esta exige menor regularidad y se adapta de manera natural a los espacios de aproximación del FEM. Para obtenerla, se multiplica la ecuación 9 por una función de prueba  $v(x) \in C_0^\infty(D)$ , obteniéndose

$$-\operatorname{div}(k(x)\nabla u(x))v(x) = f(x)v(x). \quad (10)$$



**Figura 1.** Triangulación del dominio  $D$  en elementos finitos triangulares, donde cada subdominio  $K_j$  define la discretización empleada en FEM. Elaboración propia, inspirada en [17].

Al integrar sobre el dominio  $D$ , se obtiene

$$\int_D -\operatorname{div}(k(x)\nabla u(x)) v(x) = \int_D f(x)v(x). \tag{11}$$

El siguiente paso consiste en aplicar integración por partes, con el fin de trasladar una derivada desde  $u$  hacia la función de prueba. Esto permite reducir las exigencias de regularidad sobre la solución y conduce a

$$\int_D k(x)\nabla u(x)\nabla v(x) - \int_{\partial D} \nabla u(x)\vec{n}(x)v(x) = \int_D f(x)v(x). \tag{12}$$

Como la función de prueba se anula sobre la frontera, el término de borde desaparece, y se obtiene

$$\int_D k(x)\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) = \int_D f(x)v(x). \tag{13}$$

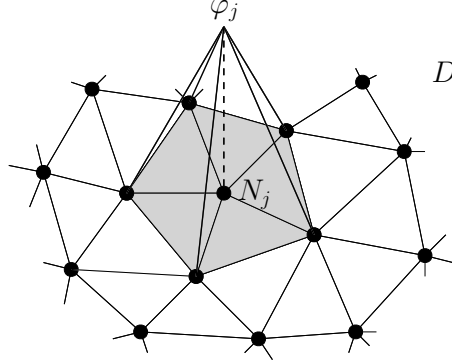
De esta manera, la formulación débil del problema queda dada por

$$(W) \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } u : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que:} \\ \int_D k(x)\nabla u(x)\nabla v(x) = \int_D f(x)v(x), \quad \text{para todo } v(x) \in C_0^\infty(D), \\ u(x) = g(x), \quad \text{para todo } x \in \partial D. \end{array} \right. \tag{14}$$

Sea  $D$  un dominio poligonal y  $T^h$  una triangulación de dicho dominio. Entonces,  $D$  queda particionado en elementos triangulares  $K_1, K_2, \dots, K_m$ , de modo que  $D = \bigcup_{i=1}^m \overline{K}_i$ , donde la intersección entre dos elementos cualesquiera satisface que  $K_i \cap K_j = \emptyset$  si  $i \neq j$ , y  $\overline{K}_i \cap \overline{K}_j$  puede ser, según el caso, el propio elemento si  $i = j$ , una arista común, un vértice común o el conjunto vacío. Véase la Figura 1.

Se define ahora el siguiente conjunto de funciones

$$P^r(T^h) = \{v : D \longrightarrow \mathbb{R} \mid v \text{ es globalmente continua, } v|_{K_i} \text{ es un polinomio de grado } r \text{ en cada variable}\}$$



**Figura 2.** Función base nodal  $\varphi_j$  asociada al nodo  $N_j$ , con soporte local sobre los elementos adyacentes de la triangulación. Elaboración propia, inspirada en [17].

$$P_0^1(T^h) = \left\{ v \in P^1(T^h) \mid v(x) = 0 \text{ para todo } x \in \partial D \right\}.$$

Conociendo esto, la ecuación 15 muestra la formulación de Galerkin del problema.

$$(G) \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } u(x) \in P_1(T^h) \text{ tal que} \\ \int_D k(x) \nabla u(x) \nabla v(x) = \int_D f(x) v(x), \quad v(x) \in P_0^1(T^h). \end{array} \right. \quad (15)$$

Las funciones base nodales de  $P^1(T^h)$  se caracterizan por satisfacer

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1, & x = x_i, \\ 0, & x \neq x_i. \end{cases} \quad (16)$$

y por ser funciones lineales por partes en cada elemento de la triangulación. En la Figura 2 se presenta la visualización de dicha función base.

Sea  $I = \{i \in \{1, \dots, m\} \mid x_i \in D\}$  el conjunto de índices interiores, y  $\Gamma = \{i \in \{1, \dots, m\} \mid x_i \in \partial D\}$  el conjunto de índices de la frontera, como  $u(x) \in P^1(T^h)$  y se quiere que en la frontera del dominio  $u(x) = g(x)$  entonces se busca una solución de la forma mostrada en la ecuación 17

$$u(x) = \sum_{i \in I} \alpha_i \varphi_i(x) + \sum_{\ell \in \Gamma} g(x_\ell) \varphi_\ell(x), \quad (17)$$

dado que asumimos que la función de prueba es 0 en la frontera, entonces  $u(x) = \sum_{i \in I} \alpha_i \varphi_i(x)$ .

Con ayuda de las funciones base, ver ecuación 16, tenemos que la formulación matricial del problema es  $A \vec{\alpha} = \vec{b}$ , donde  $\vec{\alpha} = [\alpha_i]_{i \in I}$ ,  $a_{ij} = \int_D k(x) \nabla \varphi_{x_i}(x) \nabla \varphi_{x_j}(x)$ ,  $i, j \in I$ , y

$$b_i = \int_D f(x) \varphi_i(x).$$

### 3.1 FEM para solución de la ecuación de Poisson

La ecuación de Poisson se utiliza para describir la distribución de un campo escalar, como la temperatura, la densidad de carga eléctrica o el potencial gravitatorio, en un dominio espacial determinado, es decir, se utiliza para abordar problemas de difusión, dispersión, potencial eléctrico, potencial gravitatorio, transferencia de calor y muchas otras situaciones en las que se necesita modelar la propagación o distribución de una cantidad física en un espacio, ver [18].

Consideremos así el siguiente problema de Poisson,

$$(S) \begin{cases} \text{Encontrar } u : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que:} \\ -\Delta u = f(x), \quad \text{para todo } x \in D, \\ u(x) = g(x), \quad \text{para todo } x \in \partial D. \end{cases} \quad (18)$$

Observe que  $-\Delta u = f(x)$  es equivalente a  $-\partial_x^2 u - \partial_y^2 u = f$ , luego, multiplicando por una función de prueba  $v(x, y) \in V = H_0^1(D)$  e integrando sobre el dominio se obtiene lo presentado en la ecuación 19

$$\int_D (-\partial_x^2 u - \partial_y^2 u)v = \int_D f v. \quad (19)$$

Esto es

$$-\int_D \partial_x^2 u v - \int_D \partial_y^2 u v = \int_D f v. \quad (20)$$

Integrando por partes la ecuación 20 y considerando  $v = 0$  en  $\partial D$ , se obtiene lo siguiente

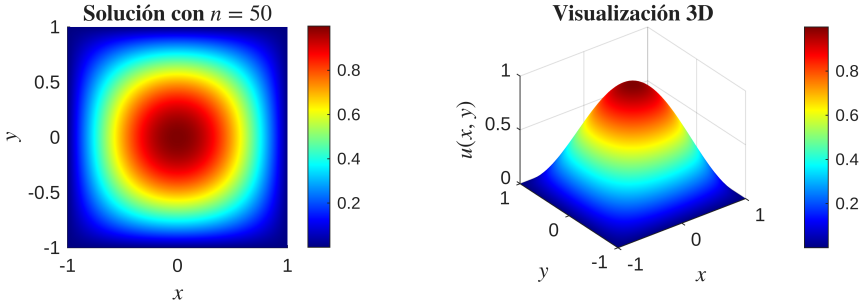
$$\int_D \partial_x u \partial_x v + \int_D \partial_y u \partial_y v = \int_D f v. \quad (21)$$

La ecuación 22 muestra la formulación débil del problema.

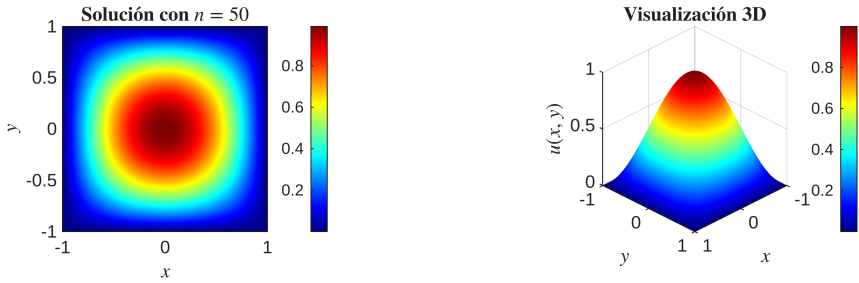
$$(W) \begin{cases} \text{Encontrar } u : D \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que:} \\ \int_D \nabla u \nabla v = \int_D f v, \quad \text{para todo } v \in H_0^1, \\ u(x) = g(x), \quad \text{para todo } x \in \partial D, \\ v(x) = 0, \quad \text{para todo } x \in \partial D. \end{cases} \quad (22)$$

Luego la formulación de Galerkin es de la siguiente forma

$$(G) = \begin{cases} \text{Encontrar } u(x) \in P_1(T^h) \text{ tal que} \\ \int_D \nabla u \nabla v = \int_D f v, \quad v(x) \in P_0^1(T^h), \\ u(x) = g(x), \quad \text{para todo } x \in \partial D. \end{cases} \quad (23)$$



**Figura 3.** Solución numérica del problema de Poisson obtenida con FEM sobre una malla más fina ( $n = 50$ ). Implementación en [26] y visualización realizada en [27].



**Figura 4.** Solución exacta del problema de Poisson. Implementación en [27]

La representación de la solución a este problema se da de la siguiente forma  $u(x) = \sum_{i \in I} \alpha_i \varphi_i(x)$ , donde  $\alpha_i$  son las constantes a determinar.

Teniendo en cuenta lo anterior, a continuación se presenta un ejemplo del problema de Poisson, junto con su solución numérica. Con base en lo anterior, consideremos el siguiente problema

$$(S) \begin{cases} \text{Encontrar } u : D = [-1, 1] \times [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que:} \\ -\operatorname{div}(\nabla u) = \frac{\pi^2}{2} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right), \\ u(x, y) = 0, \text{ para todo } (x, y) \in \partial D. \end{cases} \quad (24)$$

Puesto que  $k(x) = 1$ , el problema presenta un coeficiente de difusión homogéneo, lo que lo convierte en un caso especialmente adecuado para ser resuelto mediante el método de elementos finitos (FEM). Además, se conoce que la solución exacta del problema planteado en la expresión 24 es  $u(x, y) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right)$ .

Esta solución exacta se utilizará como referencia para comparar y evaluar la eficacia del método numérico empleado. En la Figura 3 se presenta la solución numérica  $n = 50$ , donde  $n$  denota el número de divisiones de la malla en cada dirección espacial.

En la Figura 4 se muestra la visualización de la solución exacta del problema.

Así, los errores de las soluciones numéricas para diferentes triangulaciones del dominio

**Tabla 1.** Errores de la solución numérica para distintas mallas.

Número de triángulos	$h$ (u.a.)	$L_2$ Error	$H^1$ Error
50	0.565685	0.0961235	0.267747
128	0.353553	0.0382437	0.168244
242	0.25713	0.0203404	0.122553
392	0.202031	0.012587	0.0963562
578	0.166378	0.00854703	0.0793797
800	0.141421	0.00617968	0.0674865
1152	0.117851	0.00429391	0.0562478
1568	0.101015	0.0031558	0.0482171
2048	0.0883883	0.0024167	0.0421926
2592	0.0785674	0.00190979	0.0375061
3200	0.0707107	0.0015471	0.0337566
4050	0.0628539	0.00122252	0.0300067
5000	0.0565685	0.000990311	0.0270065
6272	0.0505076	0.000789518	0.0241134
7688	0.0456198	0.000644131	0.0217801
9248	0.0415945	0.000535493	0.0198585
10952	0.038222	0.000452188	0.0182485
12800	0.0353553	0.000386911	0.0168799
14450	0.0332756	0.000342736	0.0158871
16200	0.031427	0.000305715	0.0150045

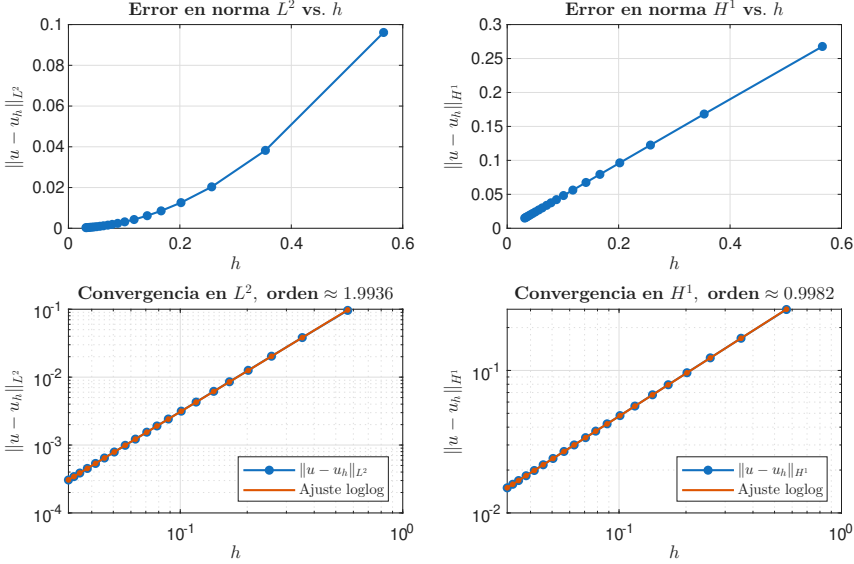
en las normas  $L_2(D)$  y  $H^1(D)$  son las presentadas en la Tabla 1.

A partir de los datos de error obtenidos para distintas triangulaciones, en la Figura 5 se estudia experimentalmente la tasa de convergencia del método. Para ello, se representan los errores en normas  $L^2$  y  $H^1$  respecto al tamaño de malla  $h$ , tanto en escala lineal como en escala log-log.

Los resultados numéricos muestran que los errores en normas  $L^2(D)$  y  $H^1(D)$  decrecen de manera sistemática a medida que la malla se refina, lo que confirma la consistencia del método. Además, las pendientes observadas en la escala log-log indican órdenes de convergencia aproximados de  $O(h^2)$  en la norma  $L^2(D)$  y de  $O(h)$  en la norma  $H^1(D)$ , en concordancia con la teoría clásica para elementos finitos lineales. En consecuencia, este ejemplo no solo ilustra el funcionamiento del FEM en un problema de difusión homogénea, sino que también proporciona una validación numérica de la implementación realizada.

#### 4. Método de elementos finitos multiescala (MsFEM)

El método de los elementos finitos multiescala (MsFEM) es una mejora del método de los elementos finitos (FEM), cuyo alto costo computacional proviene de la necesidad de usar mallas muy finas para obtener aproximaciones precisas. MsFEM construye funciones base que incorporan información local, permitiendo resolver el sistema en una malla más gruesa, reducir el número de elementos necesarios y capturar detalles de subdominios en la solución,



**Figura 5.** Errores de aproximación del método de elementos finitos lineales  $P1$  para la ecuación de Poisson en el cuadrado unitario. La fila superior muestra los errores en normas  $L^2$  y  $H^1$  en función de  $h$  en escala lineal, mientras que la fila inferior los presenta en escala log-log con sus ajustes lineales, evidenciando ordenes de convergencia aproximados de  $O(h^{1.9936})$  en  $L^2$  y  $O(h^{0.9982})$  en  $H^1$ .

Ver [28].

Para ilustrar el funcionamiento del método, consideremos la ecuación diferencial elíptica sobre un dominio  $D \subset \mathbb{R}^2$ , en donde  $k(x)$  y  $f(x)$  son funciones ya conocidas pero con heterogeneidades. En particular, en algunos ejemplos posteriores la función  $k(x)$  será la permeabilidad de un fluido.

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(k(x)\nabla u(x)) = f(x), & x \in D, \\ u(x) = 0, & x \in \partial D. \end{cases} \quad (25)$$

El método MsFEM aproxima la solución  $u : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  de la ecuación diferencial planteada mediante una combinación de funciones base multiescala en una formulación global. Al ser una generalización de FEM, inicia con una partición gruesa del dominio  $D$ , denotada por  $\mathcal{T}^H = \{K_i\}$ , menos densa que la usada en FEM.

Con el fin de incorporar información de escala fina, la partición gruesa se refina mediante una malla  $\mathcal{T}^h$ . A partir de ella se construyen funciones base multiescala, asociadas a la malla gruesa, pero capaces de reflejar variaciones locales oscilatorias en el interior de cada bloque  $K_i$ .

Para ilustrar mejor esto, se elige un nodo  $x_i$  en la partición  $\mathcal{T}^H$  tal que  $x_i \notin \partial D$ , y se toma la función base de FEM  $\varphi_i^0$  asociada a este nodo. La función base multiescala asociada al nodo  $x_i$ , denotada por  $\varphi_i^{ms}$ , es una función que tiene el mismo soporte que  $\varphi_i^0$  y, además,

cumple la condición presentada en la ecuación 26, dicha ecuación se resuelve con FEM.

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(k(x)\nabla\varphi_i^{ms}) = 0, & \text{en } K, \\ \varphi_i^{ms} = \varphi_i^0, & \text{en } \partial K. \end{cases} \quad (26)$$

El refinamiento de la malla gruesa permite capturar heterogeneidades locales y, mediante funciones base multiescala, reducir la dimensión del cálculo. Los elementos finitos se definen por estas funciones base, es decir,  $P_h = \operatorname{gen}\{\varphi_i^{ms}\}$ , por lo que la aproximación  $u^{ms}(x)$  obtenida con MsFEM pertenece a  $P_h$  y se representa como una combinación lineal de dichas funciones, según la ecuación 27.

$$u^{ms}(x) = \sum_i \alpha_i \varphi_i^{ms}. \quad (27)$$

De manera análoga al método FEM, se busca determinar los coeficientes  $\alpha_i$  de la expresión 27 de forma que dicha aproximación satisfaga el problema en escala gruesa. Para ello, se introduce una función de prueba  $v(x)$ , se sustituye  $u^{ms}$  en la ecuación diferencial original y se proyecta la formulación obtenida sobre un espacio de prueba apropiado. Este procedimiento permite obtener una formulación global consistente con la estructura multiescala de las funciones base y conduce a un sistema lineal para los coeficientes  $\alpha_i$ . Este procedimiento admite dos variantes de formulación:

Tomar las funciones de prueba  $v(x)$  como funciones que se encuentran en el espacio  $P_h = \operatorname{gen}\{\varphi_i^{ms}\}$  obteniendo así la formulación de Galerkin, ver ecuación 28

$$-\operatorname{div}(k(x)\nabla u^{ms}(x))v(x) = f(x)v(x) \quad \text{con } v(x) \in P_h. \quad (28)$$

Al integrar sobre el subdominio  $K$ , se obtiene la igualdad presentada en la ecuación 29

$$\int_K -\operatorname{div}(k(x)\nabla u^{ms}(x))v(x) = \int_K f(x)v(x). \quad (29)$$

O tomar las funciones de prueba  $v(x)$  como funciones que se encuentran en el espacio  $W_h = \operatorname{gen}\{\varphi_i^0\}$ , obteniendo así la formulación de Petrov-Galerkin, en donde, de nuevo se sigue el procedimiento inicial realizado en el capítulo 3 con  $v(x) \in W_h$  y se plantea la integración del subdominio  $K$  como en la ecuación 29 para solucionar el siguiente problema.

$$-\operatorname{div}(k(x)\nabla u^{ms}(x))v(x) = f(x)v(x) \quad \text{con } v(x) \in W_h \quad (30)$$

La solución a escala fina se proyecta mediante funciones de prueba a escala gruesa, obteniéndose una solución en escala gruesa. Aquí se emplea la formulación de Petrov-Galerkin (30) para ilustrar el método MsFEM. La integración sobre  $D$  con funciones de prueba en  $W_h$  se realiza por bloques en  $\mathcal{T}^H$ , aplicando integración por partes y considerando  $v(x) = 0$  en la frontera, lo que conduce a la ecuación 31.

$$\sum_{K \in \mathcal{T}^h} \left( \int_K k(x)\nabla u^{ms}(x)\nabla v(x) \, dx \right) = \int_D f(x)v(x) \, dx. \quad (31)$$

Sustituyendo la expresión de  $u^{ms}(x)$  dada en la ecuación 27 dentro de la formulación 31, se obtiene

$$\sum_{K \in \mathcal{T}^h} \left( \int_K k(x) \nabla \left( \sum_i \alpha_i \varphi_i^{ms} \right) \nabla v(x) dx \right) = \int_D f(x) v(x) dx. \quad (32)$$

Finalmente, se puede observar que esta última expresión se puede escribir matricialmente como un sistema dado por  $A\alpha = b$ . Tal que  $\alpha = (\alpha_i)$ ,  $A = (a_{ij})$  y  $b = (b_i)$ , en donde los elementos  $A$  y  $b$  están dados por las ecuaciones 33 y 34, respectivamente.

$$a_{ij} = \sum_{K \in \mathcal{T}^h} \int_K k(x) \nabla \varphi_i^{ms} \nabla \varphi_j^0 dx. \quad (33)$$

$$b_i = \int_D f(x) \varphi_j^0 dx. \quad (34)$$

La matriz  $A$  es dispersa, por lo que conviene emplear métodos eficientes para este tipo de sistemas lineales. Además, para simplificar la implementación, las funciones base pueden reformularse en términos de las funciones base a escala fina de FEM.

#### 4.1 MsFEM para un problema de difusión isotrópica

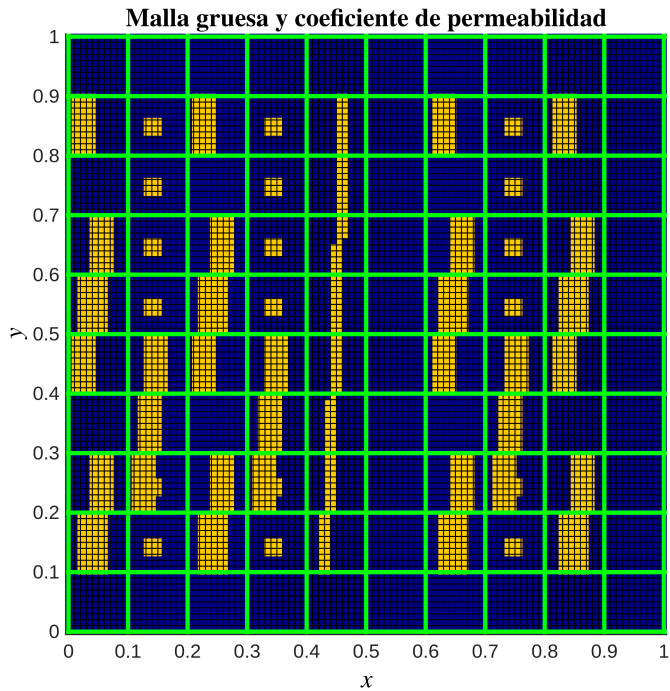
A continuación se presenta un ejemplo de difusión isotrópica en un medio heterogéneo, con el propósito de ilustrar el desempeño del método MsFEM. En este caso se estudia la aproximación obtenida sobre una malla gruesa y se compara su comportamiento frente a configuraciones de contraste uniforme y de alto contraste, con el fin de evidenciar tanto las fortalezas como las limitaciones del método. Consideremos el siguiente problema de difusión isotrópica y la malla de tamaño  $100 \times 100$  mostrada en la Figura 6, en donde se pueden observar distintos canales de contraste que componen un medio de permeabilidad heterogéneo.

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \nabla u(x_1, x_2) = 1, & x \in [0, 1] \times [0, 1], \\ u(x_1, x_2) = 0, & x \in \partial D. \end{cases} \quad (35)$$

La Figura 7 muestra una solución numérica obtenida en [27], usando una malla gruesa de  $10 \times 10$  (121 funciones base) con un refinamiento de  $10 \times 10$  por bloque. Se evalúa así la efectividad del MsFEM considerando un coeficiente de permeabilidad uniforme igual a 1 en toda la malla, incluidos canales e inclusiones.

Esta solución presenta un error numérico de 0.21001, medido en la norma  $L_2(D)$ . Se visualiza un buen comportamiento del método respecto a la solución con una fina escala. Sin embargo, colocando un coeficiente de contraste de 1 en el fondo y de  $10^6$  en los canales e inclusiones, ocurre lo que se visualiza en la Figura 8.

Esta solución presenta un error numérico de 0.87702, medido en la norma  $L_2(D)$  y con lo observado en la Figura 9, entonces, se confirma que, en un medio con un coeficiente de contraste heterogéneo y que tiene cambios bruscos, el comportamiento del método respecto a la solución con una fina escala es realmente deficiente.



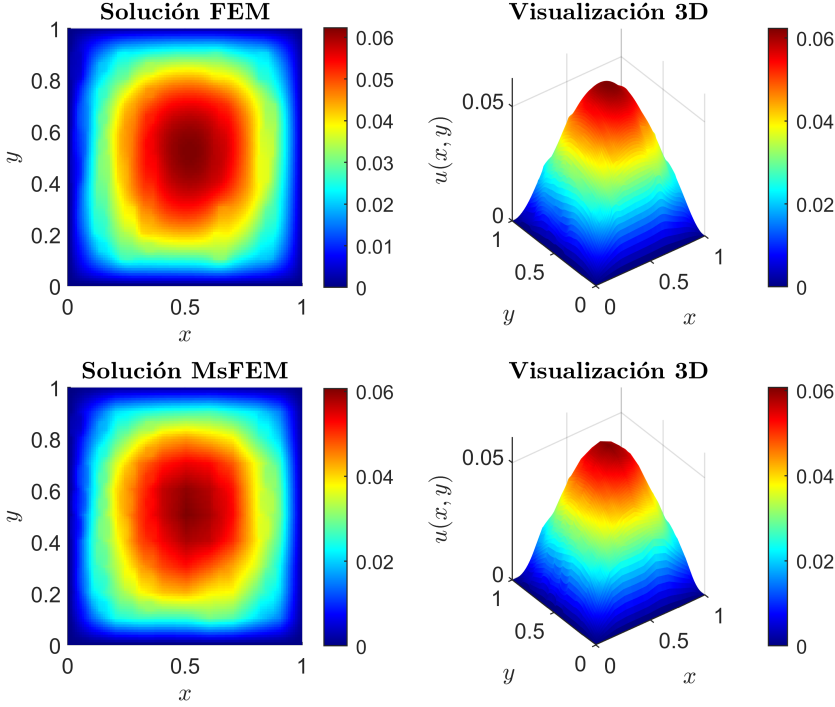
**Figura 6.** Malla uniforme de  $100 \times 100$  con canales e inclusiones, utilizada para definir el medio heterogéneo en los experimentos de MsFEM y GMsFEM. Implementación en [27].

La Figura 9 muestra que el error disminuye al refinar la malla gruesa, pero también evidencia que la tasa de convergencia del método es reducida. Mientras que para  $k = 1$  se obtiene un orden experimental cercano a 0.4885, para  $k = 10^6$  dicho orden cae a aproximadamente 0.1683, lo que confirma el deterioro del método en presencia de alto contraste. En este sentido, los resultados muestran que, aunque MsFEM puede ofrecer aproximaciones razonables en configuraciones sencillas, su desempeño se ve fuertemente limitado cuando la heterogeneidad del medio es más compleja. Esta dificultad justifica el uso de estrategias de enriquecimiento como las que introduce GMsFEM.

## 5. Método multiescala generalizado de elementos finitos (GMsFEM)

En esta sección se ilustrará el funcionamiento del Método Generalizado de Elementos Finitos Multiescala (GMsFEM), el cual es una generalización del método presentado en el capítulo 4. Este método mejora significativamente el nivel de aproximación a la solución, especialmente en problemas multiescala con alto contraste o donde  $k(x)$  tiene valores grandes y variables, GMsFEM permite introducir propiedades físicas relativas al problema multiescala e imponer condiciones en la geometría del dominio. Ver [29, 30].

Para visualizar la teoría que sustenta y se relaciona con este método (GMsFEM), se



**Figura 7.** Solución numérica obtenida con MsFEM en una malla gruesa de  $10 \times 10$ , refinada localmente por bloques, con coeficiente uniforme  $k = 1$ . Implementación en [27].

considera la misma ecuación diferencial parcial elíptica estudiada en capítulos anteriores.

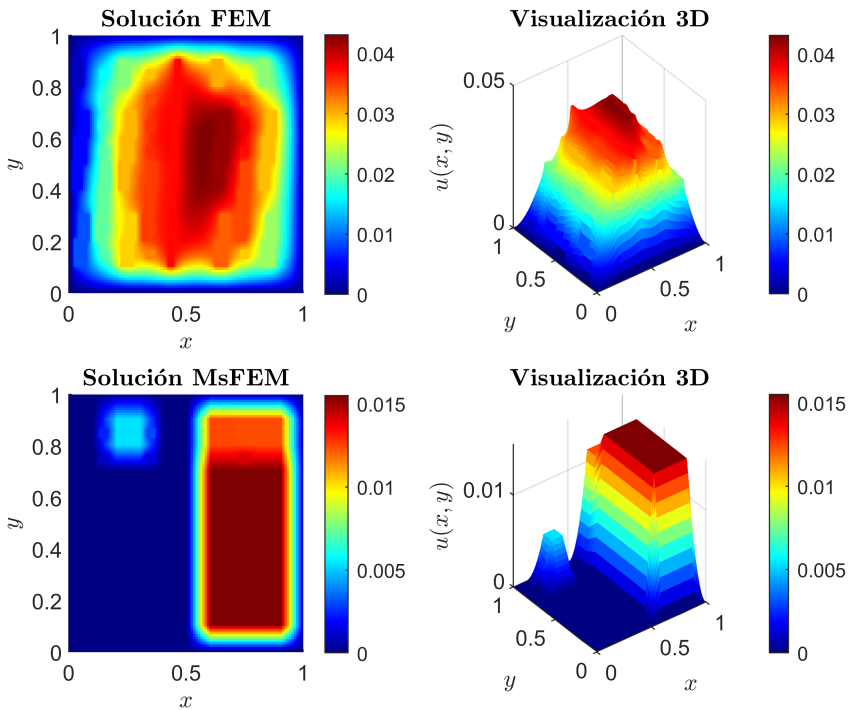
$$\begin{cases} -\operatorname{div}(k(x)\nabla u(x)) = f(x), & x \in D, \\ u(x) = 0, & x \in \partial D. \end{cases} \quad (36)$$

El objetivo de este método es hallar una solución aproximada  $u(x)$  tal que  $u \in H_0^1(D)$  y que cumpla la igualdad presentada en la ecuación 37 para cualquier función de prueba  $v(x)$  que se encuentre en el espacio  $H_0^1(D)$ .

$$\int_D k(x)\nabla u(x)\nabla v(x) \, dx = \int_D f(x)v(x) \, dx. \quad (37)$$

Al igual que en los métodos FEM y MsFEM, la aproximación de  $u(x)$  se construye a partir de una partición gruesa  $\mathcal{T}^H$  del dominio  $D$ . Luego, se introduce una malla refinada, denotada por  $\mathcal{T}^h$ , con el fin de representar de manera más adecuada la solución.

La formulación de Galerkin pide encontrar en específico a  $u(x)$  en el espacio  $V_0^h(D)$  y que siga cumpliendo la ecuación 37 con las funciones de test o prueba  $v(x)$  en el mismo espacio. Es importante aclarar que, el espacio  $V^h(D)$  es aquel conformado por la discretización del dominio  $D$  por elementos finitos de funciones continuas lineales por partes, relativas a la triangularización formada en la malla fina  $\mathcal{T}^h$  y por tanto, tómesese  $V_0^h(D)$  como todas aquellas funciones que pertenecen a  $V^h(D)$  y que son 0 en la frontera.



**Figura 8.** Solución numérica obtenida con MsFEM en un medio de alto contraste, con  $k = 1$  en el fondo y  $k = 10^6$  en canales e inclusiones. Implementación en [27].

Las integrales que aparecen en la ecuación 37 pueden expresarse, respectivamente, mediante una forma bilineal y un funcional lineal. En este trabajo, estas cantidades se denotan por  $a$  y  $F$ , y se definen en las ecuaciones 38 y 39 como

$$a(u, v) = \int_D k(x) \nabla u(x) \nabla v(x) \, dx, \tag{38}$$

y

$$F(v) = \int_D f(x) v(x) \, dx. \tag{39}$$

Así, la formulación de Galerkin de la ecuación anterior consiste en encontrar  $u \in V_0^h(D)$  tal que  $a(u, v) = F(v)$ , para todo  $v \in V_0^h(D)$ , o de manera matricial, de la siguiente forma  $Au = b$ . Y teniendo en cuenta que toda forma bilineal se puede escribir por medio de matrices, se sigue que para todo  $u, v \in V^h(D)$  se cumplen las ecuaciones 40 y 41.

$$u^T Av = a(u, v) = \int_D k(x) \nabla u(x) \nabla v(x) \, dx, \tag{40}$$

y

$$v^T b = F(v) = \int_D f(x) v(x) \, dx. \tag{41}$$

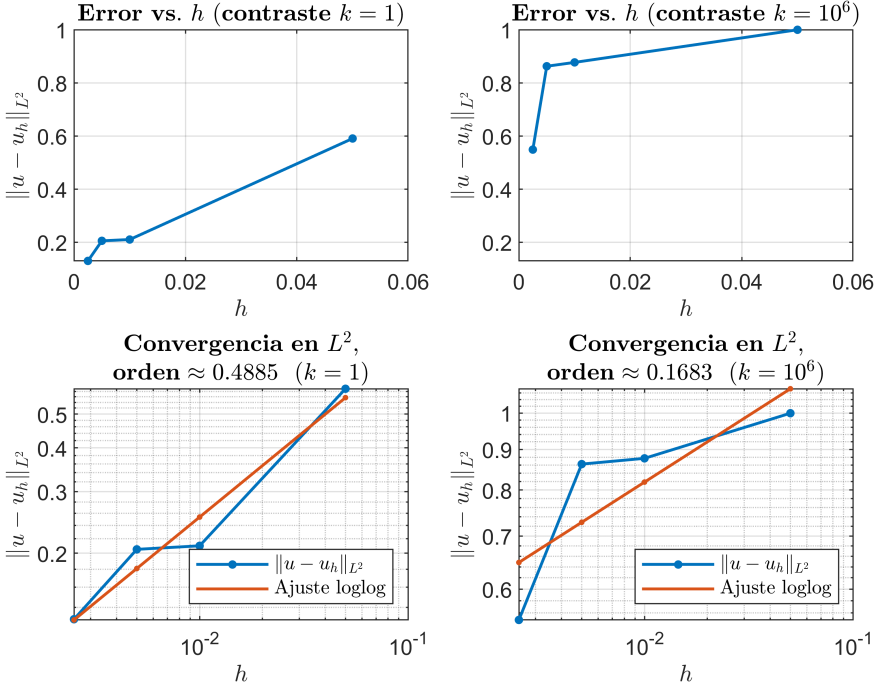


Figura 9. Orden de convergencia del método MsFEM.

Sean  $\{x_i\}$  los nodos de la malla gruesa  $\mathcal{T}^H$ . La construcción de las funciones base se realiza a partir de estos nodos; sin embargo, con el fin de incorporar de manera más adecuada la información local del medio, no se considera únicamente el punto  $x_i$ , sino también la región de la malla gruesa que lo rodea. Para ello, se define la vecindad asociada al nodo  $x_i$  como  $\omega_i = \bigcup \{K_j \in \mathcal{T}^H : x_i \in \bar{K}_j\}$ .

En la Figura 10 se muestra la vecindad del nodo  $x_i$  en el dominio  $D$ .

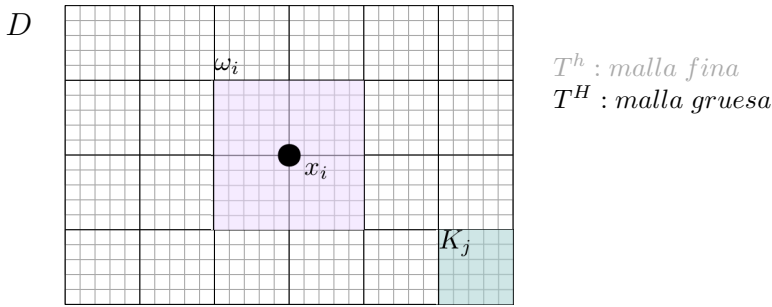
Con el fin de construir las funciones base que intervienen en la aproximación multiescala, se plantea en cada vecindad  $\omega_i$  un problema local de autovalores de alto contraste. Dicho problema, dado por la ecuación 42, tiene la forma

$$-\operatorname{div}(k(x)\nabla\psi) = \lambda k(x)\psi. \quad (42)$$

La razón del querer hallar las funciones base como combinación lineal de vectores propios es que, al determinar estos vectores en dicha región, se puede extraer la información más importante escogiendo aquellos vectores propios dominantes, es decir, aquellos que se encuentran asociados a valores propios pequeños.

Observe que, nuevamente, en la ecuación anterior se tiene un problema análogo al inicial, pero planteado sobre un dominio más pequeño. En consecuencia, su formulación débil consiste en encontrar vectores propios  $\psi$  y un número real  $\lambda$  tales que, para toda función de prueba  $z \in H_0^1(\omega_i)$ , se cumpla la ecuación 43:

$$\int_{\omega_i} k(x)\nabla\psi(x)\nabla z(x) dx = \int_{\omega_i} \lambda k(x)z(x) dx. \quad (43)$$



**Figura 10.** Vecindad  $\omega_i$  asociada al nodo  $x_i$  de la malla gruesa, formada por la unión de los elementos que comparten dicho nodo. Elaboración propia.

De manera análoga, esta expresión puede escribirse utilizando la forma bilineal  $a$ , definida previamente en la ecuación 38, y la forma bilineal  $m$ , introducida en la ecuación 44:

$$m(z_1, z_2) = \int_D k(x)z_1(x)z_2(x) dx. \tag{44}$$

Entonces, la ecuación 43 se puede expresar en términos de formas bilineales como un problema de valores y vectores propios generalizados. Tal como se muestra en la formulación 45.

$$a_{\omega_i}(\psi, z) = \lambda m_{\omega_i}(\psi, z) \quad \text{con} \quad z \in H_0^1(\omega_i). \tag{45}$$

Sin embargo, dado que se trabaja en el contexto de la formulación de Galerkin, la función de prueba  $z$  se busca en el espacio  $V_0^{\omega_i}(D)$ , entendido como un subespacio de  $V_0^h(D)$  generado por las funciones base de FEM asociadas a los nodos de la malla fina contenidos en la vecindad  $\omega_i$ .

Para mayor claridad, los valores y vectores propios resultantes de la solución de dicho problema se notarán como  $\{\lambda_j^{\omega_i}\}$  y  $\{\psi_i^{\omega_i}\}$  respectivamente. Como se mencionó, solo se escogerán los dominantes. Así, al finalizar este procedimiento con todas las vecindades, se conforma el espacio generado por todos los vectores propios escogidos y se procede a ordenar estos vectores propios según su valor propio asociado (de menor a mayor). A este espacio formado se le notará como  $V_{gms}$  el cual será el espacio de las funciones base multiescala generalizadas.

Para la construcción del espacio grueso, se seleccionan los espacios correspondientes a autovalores pequeños. Esta base se define como  $\Phi_{i,\ell} = \chi_i \psi_\ell^{\omega_i}$ ,  $1 \leq i \leq N_\nu$ ,  $1 \leq \ell \leq L_i$ , donde  $L_i$  es el número de autovalores seleccionados para el nodo  $i$ , y  $\chi_i$  es una partición de la unidad.

Finalmente, el espacio multiescala espectral local se define como  $V_{gms} = \text{span}\{\Phi_{i,\ell}\}$  con  $1 \leq i \leq N_\nu$  y  $1 \leq \ell \leq L_i$ .

Entonces, la solución en la malla gruesa  $u_0(x) = \sum_i c_i \Phi_i$  del problema se encontrará tomando las funciones de prueba  $v(x)$  en el espacio  $V_{gms}$  y solucionando la ecuación  $a(u, v) = F(v)$ .

La matriz del sistema en malla gruesa se obtiene mediante la transformación  $A_0 = R_0 A R_0^T$ , donde  $R_0^T = [\Phi_1, \dots, \Phi_{N_c}]$ .

En este contexto, las funciones  $\Phi_i$  corresponden a bases discretas definidas sobre la malla fina. Para simplificar la notación, se emplea el mismo símbolo para las bases multiescala continuas.

La solución multiescala de elementos finitos se obtiene proyectando la solución fina sobre el espacio  $V_{gms}$ , lo cual se expresa mediante la ecuación  $A_0 u_0 = b_0$ , donde  $b_0 = R_0 b$ . Finalmente, la solución en la malla gruesa se mapea de vuelta a la malla fina mediante  $u = R u_0$ .

## 5.1 Resultados numéricos

En esta subsección, se implementará el GMSFEM para resolver la ecuación de presión en medios porosos heterogéneos. A través de ejemplos comparativos con el MsFEM, se analizará la eficiencia del método en términos de precisión numérica y capacidad para capturar la dinámica multiescala, destacando el impacto del número de funciones base en la mejora de los resultados.

Los códigos de las simulaciones se encuentran disponibles en el repositorio [31].

### 5.1.1 GMSFEM para la ecuación de presión en medios porosos heterogéneos

En el contexto del flujo en medios porosos heterogéneos, se considera la ecuación elíptica 46, asociada a la ley de Darcy:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (k(x)\nabla u(x)) = f(x), x \in D, \\ u(x) = g(x), x \in \partial D. \end{cases} \quad (46)$$

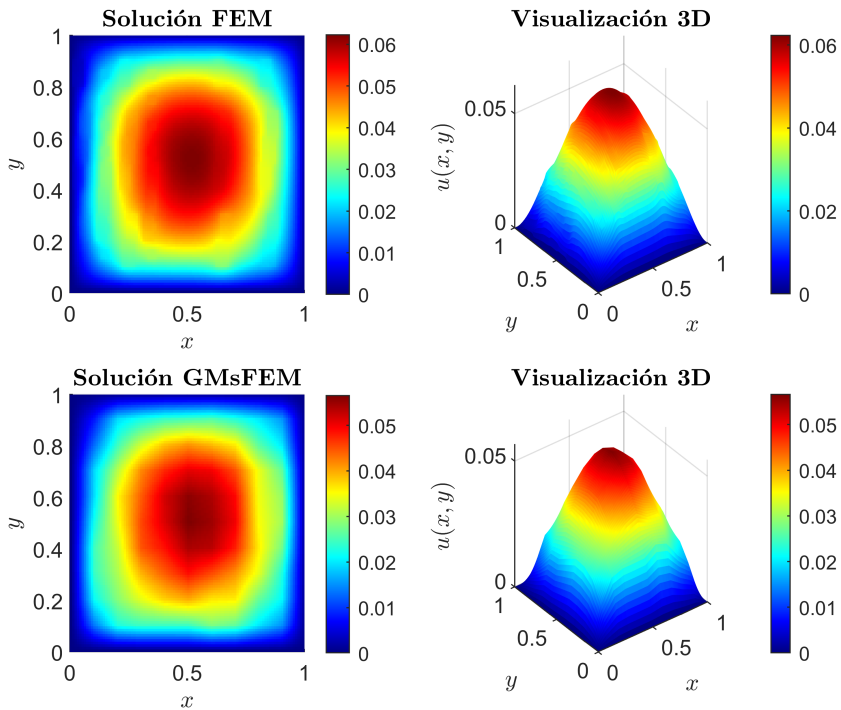
donde  $u(x)$  denota la presión,  $k(x)$  la permeabilidad del medio y  $f(x)$  una función que representa fuentes o sumideros.

Con base en lo anterior, se puede observar que el ejemplo realizado para visualizar el método MsFEM es un caso específico de la ecuación de presión en medios porosos heterogéneos y con el fin de comparar la eficiencia o ineficiencia de los métodos presentados en este trabajo, se realizará su implementación utilizando el método GMSFEM.

Considere el problema de difusión isotrópica planteado en la formulación 35 y la malla de tamaño  $100 \times 100$  observada previamente en la figura 6.

En la Figura 11 se muestra la solución numérica obtenida con [27]. Para ello, se utilizó una malla inicial de tamaño  $10 \times 10$ , la cual fue refinada en cada bloque mediante una subdivisión de  $10 \times 10$ , aplicando el método GMSFEM. En esta simulación, se consideró un coeficiente de permeabilidad uniforme e igual a 1 en todo el dominio, incluidos los canales y las inclusiones, empleando un total de 121 funciones base en la malla inicial.

Esta solución presenta un error numérico de 0.31817, medido en la norma  $L_2(D)$ . Se observa un buen comportamiento del método con respecto a la solución de fina escala. Sin embargo, la comparación con los resultados de MsFEM consignados en el Cuadro 2 muestra que no se obtiene una mejora ni en el error ni en la calidad de la aproximación, lo cual pone de manifiesto la necesidad de considerar espacios de funciones base de mayor dimensión para que GMSFEM produzca resultados más competitivos.



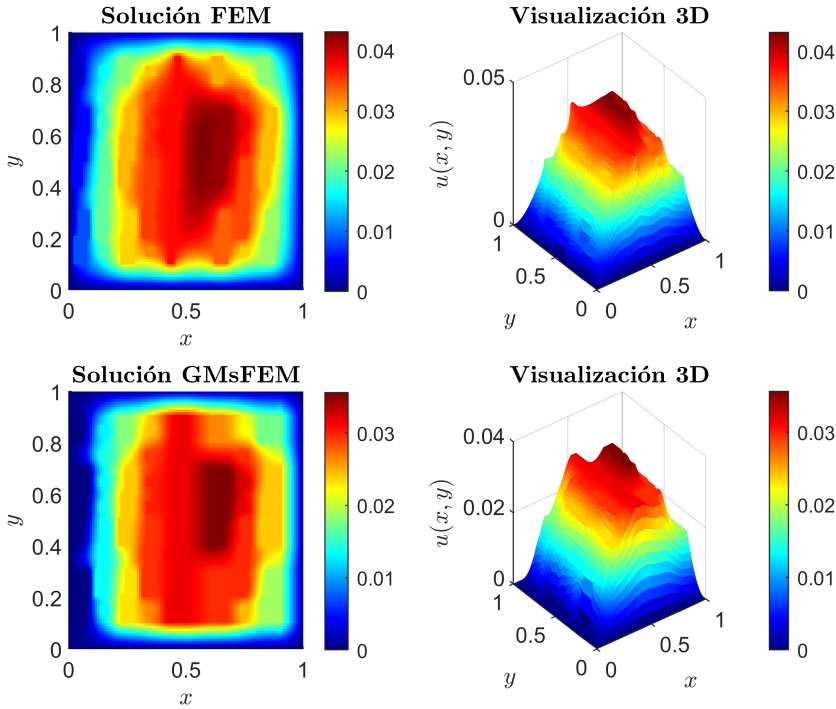
**Figura 11.** Solución numérica obtenida con GMsFEM usando 121 funciones base y contraste uniforme ( $k = 1$ ) en toda la malla. Elaborado en [27].

**Tabla 2.** Errores de la solución numérica para distintas mallas gruesas, fijando una malla fina de  $10 \times 10$  y sin funciones base adicionales.

Malla gruesa	Método	Número de funciones base	$L_2$ Error
$2 \times 2$	MsFEM	9	0.59044
$2 \times 2$	GMsFEM	9	0.65724
$10 \times 10$	MsFEM	121	0.21001
$10 \times 10$	GMsFEM	121	0.31817
$20 \times 20$	MsFEM	441	0.20517
$20 \times 20$	GMsFEM	441	0.26225
$40 \times 40$	MsFEM	1681	0.12953
$40 \times 40$	GMsFEM	1681	0.17827

Por otro lado, al considerar un coeficiente de permeabilidad igual a 1 en el resto del dominio y de  $10^6$  en los canales e inclusiones, y al emplear 205 funciones base en la malla gruesa, se obtienen los resultados que se muestran en la Figura 12.

Esta solución presenta un error numérico de 0.3643, medido en la norma  $L_2(D)$ , y evidencia un comportamiento favorable con respecto a la solución de fina escala. La comparación con los resultados de MsFEM consignados en el Cuadro 3 muestra una reducción importante del error frente al valor de 0.8770 obtenido en la misma configuración. Sin embargo, también se observa que, para alcanzar aproximaciones de mayor calidad, es necesario



**Figura 12.** Solución numérica obtenida con GMsFEM en un medio de alto contraste, con 205 funciones base,  $k = 1$  en el fondo y  $k = 10^6$  en canales e inclusiones. Elaborado en [27].

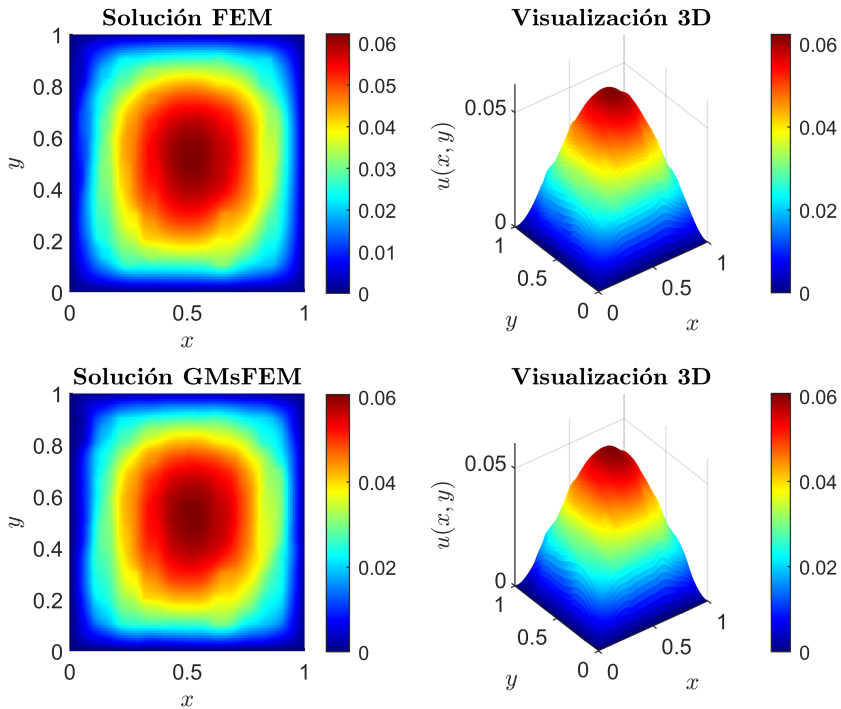
**Tabla 3.** Errores de la solución numérica para distintas mallas gruesas fijando una malla fina de  $10 \times 10$ , sin funciones base adicionales y con un coeficiente de contraste de  $10^6$ .

Malla gruesa	Método	Número de funciones base	$L_2$ Error
$2 \times 2$	MsFEM	9	0.9998
$2 \times 2$	GMsFEM	39	1
$10 \times 10$	MsFEM	121	0.87702
$10 \times 10$	GMsFEM	326	0.3643
$20 \times 20$	MsFEM	441	0.86249
$20 \times 20$	GMsFEM	1002	0.3315
$40 \times 40$	MsFEM	1681	0.54864
$40 \times 40$	GMsFEM	3377	0.3041

incorporar un número más amplio de funciones base.

La Figura 13 muestra la solución numérica obtenida al resolver el mismo problema incorporando 4 funciones base adicionales en el método multiescala generalizado. Para ello, se utiliza una malla gruesa de tamaño  $10 \times 10$ , refinada en cada bloque mediante una subdivisión de  $10 \times 10$ , dentro del esquema GMsFEM. En esta simulación, se considera un coeficiente de permeabilidad uniforme e igual a 1 en todo el dominio, incluidos los canales y las inclusiones, y se emplea un total de 605 funciones base en la malla gruesa.

Esta solución presenta un error numérico de 0.20059, medido en la norma  $L_2(D)$ . Se



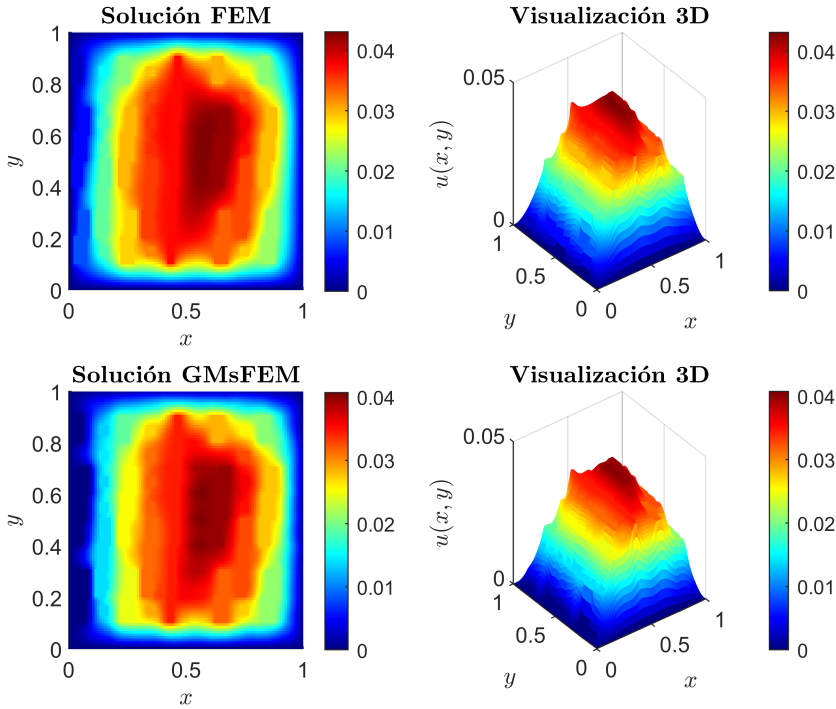
**Figura 13.** Solución numérica obtenida con GMsFEM usando 605 funciones base y contraste uniforme ( $k = 1$ ), mostrando una mejor aproximación por enriquecimiento del espacio. Elaboración en [27].

**Tabla 4.** Errores de la solución numérica para distintas mallas gruesas fijando una malla fina de  $10 \times 10$ , con 4 funciones base adicionales por nodo y un coeficiente de contraste de 1.

Malla gruesa	Método	Número de funciones base	$L_2$ Error
$2 \times 2$	MsFEM	9	0.59044
$2 \times 2$	GMsFEM	45	0.6439
$10 \times 10$	MsFEM	121	0.21001
$10 \times 10$	GMsFEM	605	0.20059
$20 \times 20$	MsFEM	441	0.20517
$20 \times 20$	GMsFEM	2205	0.11032
$40 \times 40$	MsFEM	1681	0.12953
$40 \times 40$	GMsFEM	8405	0.082314

visualiza un buen comportamiento del método respecto a la solución con una fina escala. Sin embargo, en comparación con MsFEM no se observan mejoras sustanciales en términos del error y de la solución, lo cual es esperable, pues el GMsFEM se especializa en medios heterogeneos de alto contraste. Se puede observar de mejor manera la comparación de los métodos en el Cuadro 4.

Por otro lado, continuando con 4 bases adicionales y colocando un coeficiente de  $10^6$  en los canales e inclusiones y 1 en el resto del dominio, se emplean 689 funciones base en la malla gruesa y ocurre lo que se visualiza en la Figura 14.



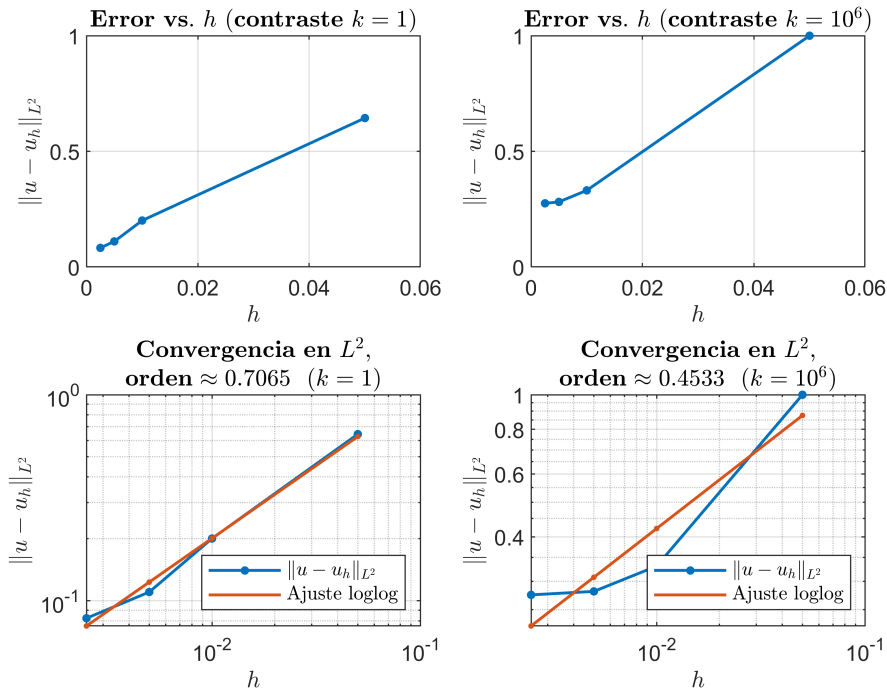
**Figura 14.** Solución numérica obtenida con GMsFEM en un medio de alto contraste, usando 689 funciones base para mejorar la aproximación respecto a MsFEM. Implementación en [27].

**Tabla 5.** Errores de la solución numérica para distintas mallas gruesas fijando una malla fina de  $10 \times 10$ , con 4 funciones base adicionales por nodo y un coeficiente de contraste de  $10^6$ .

Malla gruesa	Método	Número de funciones base	$L_2$ Error
$2 \times 2$	MsFEM	9	0.9998
$2 \times 2$	GMsFEM	66	1
$10 \times 10$	MsFEM	121	0.87702
$10 \times 10$	GMsFEM	689	0.33107
$20 \times 20$	MsFEM	441	0.86249
$20 \times 20$	GMsFEM	2325	0.28125
$40 \times 40$	MsFEM	1681	0.54864
$40 \times 40$	GMsFEM	8420	0.27504

Esta solución presenta un error numérico de 0.33107, medido en la norma  $L_2(D)$ . Con ello se confirma que, como se ha mencionado previamente, en un medio con un coeficiente de contraste heterogéneo y cambios bruscos, el comportamiento del método respecto a la solución a fina escala es mucho más eficiente que la del método MsFEM.

A continuación, y como prueba de lo mencionado anteriormente, se presenta una comparación entre los resultados de los métodos MsFEM y GMsFEM con funciones base adicionales, utilizando una malla fina fija de  $10 \times 10$  e incrementando la malla gruesa para un coeficiente de contraste  $k = 10^6$  en canales e inclusiones, ver Cuadro 5.



**Figura 15.** Orden de convergencia del método GMsFEM en presencia de funciones base adicionales y alto contraste.

Finalmente, los resultados ilustrados en la Figura 15 demuestran que los órdenes de convergencia obtenidos mediante el método GMsFEM superan significativamente a los del MsFEM estándar. Esto confirma que la incorporación de funciones de base adicionales permite al método capturar de manera más robusta las heterogeneidades del medio, manteniendo su eficacia incluso en escenarios de alto contraste.

En conjunto, los resultados obtenidos muestran que la eficacia de GMsFEM depende tanto del contraste del medio como del número de funciones base consideradas. En el caso de contraste uniforme, la mejora con respecto a MsFEM es limitada cuando se utiliza un espacio reducido, aunque se vuelve más visible al enriquecer la base multiescala. En cambio, en medios de alto contraste, GMsFEM produce reducciones de error más significativas, especialmente cuando se incorporan funciones base adicionales. Así, el ejemplo confirma que la principal ventaja del método se manifiesta en problemas donde la heterogeneidad local exige espacios de aproximación más ricos.

## 6. Conclusiones

Este trabajo permitió estudiar, comparar e implementar tres enfoques numéricos para la solución de ecuaciones diferenciales parciales elípticas: el método de elementos finitos (FEM), el método multiescala de elementos finitos (MsFEM) y el método multiescala generalizado de elementos finitos (GMsFEM). En conjunto, los resultados obtenidos muestran que la elección del método depende de manera decisiva de la estructura del medio y del grado de complejidad multiescala del problema. En particular, mientras que el FEM reproduce adecuadamente el

comportamiento esperado en problemas homogéneos y sirve como referencia para validar órdenes de convergencia clásicos, los métodos multiescala resultan más pertinentes cuando el coeficiente de difusión presenta heterogeneidades relevantes a escala fina.

Desde el punto de vista metodológico, el estudio confirma que el MsFEM constituye una alternativa eficiente frente al FEM cuando se busca incorporar información microscópica en una discretización gruesa sin recurrir a refinamientos globales excesivos. Sin embargo, también se evidenció que su capacidad de aproximación se deteriora de forma significativa en medios de alto contraste o con estructuras complejas de conectividad, donde una sola función base por nodo resulta insuficiente para capturar la dinámica local. Este comportamiento fue visible en los experimentos numéricos, en los cuales el error del MsFEM aumentó considerablemente al pasar de configuraciones homogéneas a escenarios con canales e inclusiones de contraste elevado.

En este contexto, el principal aporte del trabajo radica en mostrar, tanto desde la formulación teórica como desde la implementación computacional, que el GMsFEM ofrece un marco más robusto para el tratamiento de problemas multiescala complejos. La construcción de espacios locales enriquecidos mediante problemas espectrales permite adaptar la base multiescala a la heterogeneidad del medio y mejorar la representación de la solución sin necesidad de resolver el problema completo en la malla fina. Los resultados numéricos indican que esta estrategia produce mejoras claras frente al MsFEM en medios de alto contraste, especialmente cuando se incorporan funciones base adicionales, lo que confirma la relevancia del enriquecimiento espectral como mecanismo para aumentar la capacidad aproximante del espacio reducido.

Asimismo, el trabajo aporta una integración valiosa entre revisión conceptual e implementación práctica, al presentar de manera progresiva los fundamentos variacionales, matriciales y computacionales de los tres métodos. Esta articulación no solo favorece la comprensión comparativa entre FEM, MsFEM y GMsFEM, sino que también proporciona una base útil para futuras aplicaciones en problemas de difusión, flujo en medios porosos y otros modelos con heterogeneidades multiescala. En este sentido, el artículo tiene un aporte principalmente metodológico y formativo, al ofrecer una ruta clara para estudiar e implementar estos esquemas en entornos computacionales como FreeFem++ y MATLAB.

No obstante, los resultados también muestran algunas limitaciones que deben señalarse. En primer lugar, los experimentos se concentraron en configuraciones específicas de difusión isotrópica y en ejemplos bidimensionales, por lo que el alcance de las conclusiones debe entenderse dentro de ese marco. En segundo lugar, la mejora del GMsFEM depende de manera importante del número de funciones base seleccionadas, lo que introduce un compromiso entre precisión y costo computacional que no fue explorado de forma exhaustiva. Finalmente, aunque se presentaron comparaciones numéricas representativas, no se desarrolló un análisis teórico detallado de complejidad ni una estimación rigurosa del error para todos los escenarios considerados.

**Contribución de autoría:** A.F.L: Conceptualization, Methodology, Software, Formal analysis, Investigation, Validation, Writing – original draft, Writing – review & editing. Y.S.P: Project administration, resource management, supervision, and team direction. Y.T.L: Conceptualization, Methodology, Software, Formal analysis, Validation, Visualization, Writing – original draft, Writing – review & editing.

**Conflictos de interés:** No existe conflicto de intereses entre los autores.

**Disponibilidad de datos y materiales:** Los datos se encuentran en GitHub: <https://github.com/ytrujillo/Estudio-e-implementaci-n-del-m-todo-multiescala-generalizado-GMsFEM-.git>

**Declaración del Comité de Ética Institucional:** No aplica.

**Declaración de consentimiento informado:** No aplica.

**Financiamiento:** No hubo financiamiento para estudiantes de Colombia. La estudiante de maestría Yesy Sarmiento si viajó por medio del programa para la movilidad internacional de estudiantes de posgrado 2024.

## Referencias

- [1] Chen Z, Cui M, Savchuk T y Yu X. The Multiscale Finite Element Method with Nonconforming Elements for Elliptic Homogenization Problems. En: *Multiscale Modeling & Simulation* 7.(2) (2008), 517-538. doi: 10.1137/070691917.
- [2] Chung E, Efendiev Y, Leung W y Ye S. Generalized multiscale finite element methods for space–time heterogeneous parabolic equations. En: *Computers & Mathematics with Applications* 76.(2) (2018), 419-437. doi: 10.1016/j.camwa.2018.04.028.
- [3] Wang M, Wei C, Song H, Efendiev Y y Wang Y. *Generalized Multiscale Coupling of Triple-Continuum Model and Discrete Fracture Network for Carbonate Reservoir Simulation*. SPE paper. 2017. doi: 10.2118/187333-MS.
- [4] Efendiev Y, Hou T y Wu X. Convergence of a Nonconforming Multiscale Finite Element Method. En: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 37.(3) (2000), 888-910. doi: 10.1137/S0036142997330329.
- [5] Efendiev Y, Iliev O y Kronsbein C. Multilevel Monte Carlo methods using ensemble level mixed MsFEM for two-phase flow and transport simulations. En: *Computational Geosciences* 17.(5) (2013), 833-850. doi: 10.1007/s10596-013-9358-y.
- [6] Gavrilieva U, Vasilyeva M y Chung E. Generalized Multiscale Finite Element Method for Elastic Wave Propagation in the Frequency Domain. En: *Computation* 8.(3) (2020), 63. doi: 10.3390/computation8030063.
- [7] Efendiev Y, Galvis J y Hou T. Generalized multiscale finite element methods (GMsFEM). En: *Journal of Computational Physics* 251 (2013), 116-135. doi: 10.1016/j.jcp.2013.04.045.
- [8] Li G. On the Convergence Rates of GMsFEMs for Heterogeneous Elliptic Problems Without Oversampling Techniques. En: *Multiscale Modeling & Simulation* 17.(2) (2019), 593-619. doi: 10.1137/18M1172715.
- [9] Chung E, Efendiev Y y Lee C. Mixed Generalized Multiscale Finite Element Methods and Applications. En: *Multiscale Modeling & Simulation* 13.(1) (2015), 338-366. doi: 10.1137/140970574.
- [10] Efendiev Y, Galvis J, Li G y Presho M. Generalized Multiscale Finite Element Methods: Oversampling Strategies. En: *International Journal for Multiscale Computational Engineering* 12.(6) (2014), 465-484. doi: 10.1615/IntjMultCompEng.2014007646.
- [11] He Z, Chung E, Chen J y Chen Z. Generalized multiscale approximation of a multipoint flux mixed finite element method for Darcy–Forchheimer model. En: *arXiv preprint arXiv:2007.08942* (2020). doi: 10.48550/arXiv.2007.08942.
- [12] Efendiev Y, Lee S, Li G, Yao J y Zhang N. Hierarchical multiscale modeling for flows in fractured media using generalized multiscale finite element method. En: *International Journal on Geomathematics* 6.(2) (2015), 141-162. doi: 10.1007/s13137-015-0075-7.
- [13] Wang M, Cheung S, Chung E, Vasilyeva M y Wang Y. Generalized multiscale multicontinuum model for fractured vuggy carbonate reservoirs. En: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 366 (2020), 112370. doi: 10.1016/j.cam.2019.112370.
- [14] Li M, Chung E y Jiang L. A Constraint Energy Minimizing Generalized Multiscale Finite Element Method for Parabolic Equations. En: *Multiscale Modeling & Simulation* 17.(3) (2019), 996-1018. doi: 10.1137/18M1193128.
- [15] Tao T. *Analysis II*. Hindustan Book Agency, 2006.

- [16] Apostol T. *Mathematical Analysis Second Edition*. Addison-Wesley, 1974.
- [17] Braess D. *Finite Elements: Theory, Fast Solvers, and Applications in Solid Mechanics*. Cambridge University, 2007.
- [18] Johnson C. *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*. Cambridge University, 1987.
- [19] Hoffman K y Kunze R. *Linear Álgebra*. Pearson, 1971.
- [20] Axler S. *Linear Algebra Done Right, Second Edition*. Springer, 1997.
- [21] Vázquez JL. The Mathematical Theories of Diffusion: Nonlinear and Fractional Diffusion. En: *Nonlocal and Nonlinear Diffusions and Interactions: New Methods and Directions*. Springer, 2017, 205-278. doi: 10.1007/978-3-319-61494-6\_5.
- [22] Taylor ME. *Partial Differential Equations II: Qualitative Studies of Linear Equations*. Springer, 1996. doi: 10.1007/978-1-4757-4187-2.
- [23] Jaroudi R. Inverse Mathematical Models for Brain Tumour Growth. Tesis doct. Linköping University, n.d. doi: 10.3384/lic.diva-141982.
- [24] Qiao Z y Sun S. Two-Phase Fluid Simulation Using a Diffuse Interface Model with Peng-Robinson Equation of State. En: *SIAM Journal on Scientific Computing* 36.(4) (2014), B708-B728. doi: 10.1137/130933745.
- [25] Fellner K y Tang BQ. Entropy Methods and Convergence to Equilibrium for Volume-Surface Reaction-Diffusion Systems. En: *Active Particles, Volume 2*. Birkhäuser, 2017, 153-176. doi: 10.1007/978-3-319-66839-0\_8.
- [26] FreeFem++. *FreeFem++ Documentation*. Recuperado de: <https://doc.freefem.org/>. s.f.
- [27] MATLAB. *Ayuda de MATLAB*. Recuperado de: <https://la.mathworks.com/help/index.htm>. s.f.
- [28] Efendiev Y y Hou T. *Multiscale Finite Element Methods, Theory and Applications*. Springer, 2009.
- [29] Chung, Efendiev Y y Hou T. *Multiscale Model Reduction*. Springer, 2023.
- [30] Contreras L. On generalized multiscale methods for flow in complex porous media and their applications. En: *Universidad Nacional de Colombia* (2022).
- [31] Forero A y Trujillo Y. Repositorio del estudio e implementación del método multiescala generalizado (GMsFEM). GitHub. 2025. <https://github.com/ytrujillo/Estudio-e-implementaci-n-del-m-todo-multiescala-generalizado-GMsFEM-> (visitado 13-03-2026).