Nexo Revista Científica

ISSN-L 1818-6742
Impreso en Nicaragua.
http://revistasnicaragua.peri.net.ni/index.php/nexo/index

Vol. 24, No. 02, pp.135-147/Diciembre 2011

Relaciones entre el operador L_a iterado j veces y la derivada de orden $(k-1)$ de la delta de Dirac soportada en $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$.

Manuel A. Aguirre* y Emilio Aguirre Rébora

Núcleo Consolidado Matemática Pura y Aplicada
Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Nacional del Centro
Tandil, Argentina
e-mail: maguirre@exa.unicen.edu.ar

(Recibido/received: 19-Septiembre-2011; aceptado/accepted: 22-Noviembre-2011)

RESUMEN

En este artículo se obtienen fórmulas entre el operador L_a iterado j veces definido por la fórmula (31) y la derivada de orden $(k-1)$ de la delta de Dirac soportada en $V(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$ En particular se obtiene que $\delta^{(k-1)}(V)$ es una solución homogénea del operador ultrahiperbólico iterado l veces si $\frac{n}{2} - k \le j < \frac{n}{2}$ y $E_{n,k,\mu,\nu}$ está definida por medio de la fórmula (78) y es solución elemental del operador L_a iterado s veces. Haciendo $k = s+1, l = 1$ en (18) se tiene que $\delta^{(s)}(P_+)$ es solución homogénea del operador ultrahiperbólico si $s = \frac{n-4}{2}$. Nuestros resultados son generalizaciones de fórmulas que aparecen en ([10]).

Palabras claves: Delta de Dirac; Operador

ABSTRACT

In this paper we obtained formulas between the operator L_a iterated j times defined by formula (31) and the first order derivative of the Dirac delta supported in $V(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$. In particular it is obtained that $\delta^{(k-1)}(V)$ is a homogenous solution of the ultra-hyperbolic operator iterated l times if $\frac{n}{2} - k \le j < \frac{n}{2}$ and $E_{n,k,\mu,\nu}$ is defined by means of the formula (78) and it is an elemental solution of operator L_a iterated s times. Doing $k = s+1, l = 1$ in (18), $\delta^{(s)}(P_+)$ becomes a homogeneous solution of the operator ultra-hyperbolic if $s = \frac{n-4}{2}$. Our results are generalizations of the formulas in ([10]).

Key wordsw: Dirac`s delta; Operator

---

* Este trabajo es soportado parcialmente por la Comisión de Investigaciones Científicas (C.I.C.) de la Provincia de Buenos Aires, Argentina.

INTRODUCCIÓN

Sea $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un punto de R^n y sea

$$V = V(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j^2 = a_1 x_1^2 + \ldots + a_\mu x_\mu^2 + a_{\mu+1} x_{\mu+1}^2 + \ldots + a_{\mu+\nu} x_{\mu+\nu}^2 \tag{1}$$

donde a_j son números reales, $\mu + \nu = n$ dimensión del espacio.

Designamos el dominio:

$$T_+ = \{x \in R^n : x_1 > 0, x_2 > 0, \ldots, x_\mu,\ V > 0\} \tag{2}$$

y con $\overline{T_+}$ se designa su clausura.

Consideremos la familia de funciones distribucionales $B_\alpha(x)$ definida por

$$B_{\alpha+mn-n}(V) = \begin{cases} \dfrac{V_+^{\frac{\alpha-n}{2m}}}{K_{m,n}(\alpha)} \text{ si } x \in T_+ \\ \\ 0 \text{ si } x \notin T_+ \end{cases} \tag{3}$$

donde α es un número complejo, $m = 1, 2, ..$ y $K_{m,n(\alpha)}$ es definida por

$$K_{m,n(\alpha)} = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(\frac{\alpha-n}{2m} + 1) \Gamma(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2m}) \Gamma(\frac{\alpha}{m})}{\Gamma(\frac{\alpha-\mu}{2m} + 1) \Gamma(\frac{\mu-\alpha}{2m})} \tag{4}$$

y

$$< V_+^{\frac{\alpha-n}{2m}}, \varphi >= \int_{V>0} V^{\frac{\alpha-n}{2m}} \varphi(x) dx. \tag{5}$$

En (5), φ es una función de prueba que pertenece a D (espacio de funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto).

$B_{\alpha+mn-n}(V)$, la cual es una función ordinaria si $\mathrm{Re}(\frac{\alpha}{2m}) \geq \frac{n}{2m}$, es una distribución con respecto al parámetro α. Llamaremos $B_{\alpha+mn-n}(V)$ la generalización del Núcleo Ultrahiperbólico de Nozaki Y.

Haciendo $m = 1$, $a_1 = a_2 \ldots = a_\mu = 1$ y $a_{\mu+1} = a_{\mu+2} = \ldots = a_{\mu+\nu} = -1$ en (3) y (4) la fórmula (3) se reduce a

$$B_\alpha(V) = R_\alpha(u) = \begin{cases} \dfrac{u_+^{\frac{\alpha-n}{2}}}{K_{1,n}(\alpha)} \text{ si } x \in T_+ \\ \\ 0 \text{ si } x \notin T_+ \end{cases} \tag{6}$$

donde

$$u = u(x_1,\ldots,x_n) = x_1^2 + \ldots + x_\mu^2 - x_{\mu+1}^2 - \ldots - x_{\mu+\nu}^2 \tag{7}$$

y

$$K_{1,n}(\alpha) = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(\frac{\alpha-n}{2}+1)\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2})\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\frac{\alpha-\mu}{2}+1)\Gamma(\frac{\mu-\alpha}{2})}. \tag{8}$$

$R_\alpha(u)$ es intoducido por Nozaki Y. en(([1]), p.72) y $R_\alpha(u)$ es llamado en ([2]) El nùcleo ultrahiperbólico de Marcel Riesz .

Haciendo $\mu = 1$ en (6), (7) y (8), se obtiene precisamente el núcleo ultrahiperbólico de Marcel Riesz (([1]), p. 72)). Observe que poniendo $\mu = 1$ en (6), (7), (8) y recordando la fórmula de duplicación de Legendre de $\Gamma(z)$:

$$\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}) \text{ ([4],p.5, fórmula(15))} \tag{9}$$

la fórmula (6) se reduce a

$$N_\alpha(u) = \begin{cases} \frac{\sigma_+^{\frac{\alpha-n}{2}}}{H_{n(\alpha)}} \text{ if } x \in T_+ \\ 0 \text{ if } x \notin T_+ \end{cases} \tag{10}$$

donde

$$\sigma = x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2 \tag{11}$$

y

$$H_n(\alpha) = 2^{\alpha-1}\pi^{\frac{n-2}{2}}\Gamma(\frac{\alpha}{2})\Gamma(\frac{\alpha-n}{2}+1) \tag{12}$$

$N_\alpha(u)$ es el núcleo hiperbólico de Marcel Riesz ([3], p.31).

Observe que considerando la fórmula(9), la fórmula (4) se reduce a

$$K_{m,n}(\alpha) = H_{m,n}(\alpha)X_m(\mu,\alpha) \tag{13}$$

donde

$$H_{m,n}(\alpha) = \pi^{\frac{n-2}{2}}2^{\frac{\alpha}{m}-1}\Gamma(\frac{\alpha}{2m})\Gamma(\frac{\alpha-n}{2m}+1) \tag{14}$$

y

$$X_m(\mu,\alpha) = \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2m}+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2m})}{\Gamma(\frac{\alpha-\mu}{2m}+1)\Gamma(\frac{\mu-\alpha}{2m})}. \tag{15}$$

Ahora usando la fórmulas

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(z\pi)} \tag{16}$$

y

$$\Gamma(\frac{1}{2}+z)\Gamma(\frac{1}{2}-z) = \frac{\pi}{\cos(z\pi)}, \tag{17}$$

$X_m(\mu,\alpha)$ puede escribire de la siguiente forma:

$$X_m(\mu,\alpha) = (-1)^{\frac{\mu-m}{2m}} \text{ si } \mu = 2ms+m, s = 1,2,.. \tag{18}$$

y

$$X_m(\mu,\alpha) = -(-1)^{\frac{\mu}{2m}} \frac{\sin(\frac{\alpha\pi}{2m})}{\cos(\frac{\alpha\pi}{2m})} \text{ si } \mu = 2ms, s = 1,2,.. \tag{19}$$

Por tanto, de (15) y considerando (18) y (19) se tiene,

$$K_{m,n}(\alpha) = (-1)^{\frac{\mu-n}{2m}} H_{m,n}(\alpha) \text{ si } \mu = 2ms+m \tag{20}$$

y

$$K_{n,n}(\alpha) = [(-1)(-1)^{\frac{\mu}{2m}} \frac{\sin(\frac{\alpha\pi}{2m})}{\cos(\frac{\alpha\pi}{2m})}]H_{m,n}(\alpha) \text{ si } \mu = 2ms. \tag{21}$$

De (3) y usando (20) y (21), $B_{\alpha+mn-n}(V)$ puede escribirse en la siguiente forma:

$$B_{\alpha+mn-n}(V) = \frac{V_+^{\frac{\alpha-n}{2m}}}{(-1)^{\frac{\mu-m}{2m}} H_{m,n}(\alpha)} \text{ si } \mu = 2ms+m \tag{22}$$

y

$$B_{\alpha+mn-n}(V) = \frac{V_+^{\frac{\alpha-n}{2m}} \cos(\frac{\alpha\pi}{2m})}{[(-1)(-1)^{\frac{\mu}{2m}} \sin(\frac{\alpha\pi}{2m})]H_{m,n}(\alpha)} \text{ si } \mu = 2ms. \tag{23}$$

$B_{2k}(V)$

Ahora vamos a estudiar $B_{\alpha+mn-n}(V)$ para $m = 1$ y $\alpha = 2k$. De ([6]), $V_+^{\frac{\alpha-n}{2}}$ tiene singularidades en los puntos $\alpha = -2k, k = 1,2,\ldots$ para n par y $k < \frac{n}{2}$. En el caso $k = 0$, $V_+^{\frac{\alpha-n}{2}}$ tiene singularidades para n par y también para n impar si $a_1,\ldots a_\mu > 0$ y $a_{\mu+1},\ldots a_{\mu+\nu} < 0$. Por tanto

$$\lim_{\alpha\to 2k} \frac{V_+^{\frac{\alpha-n}{2}}}{\Gamma(\frac{\alpha-n}{2}+1)} = \frac{V_+^{k-\frac{n}{2}}}{\Gamma(k-\frac{n}{2}+1)} \neq \infty \tag{24}$$

para n impar pero también es válido para n par bajo la condición $k \geq \frac{n}{2}$.
Para n par y $k < \frac{n}{2}$, se tiene

$$\lim_{\alpha \to 2k} \frac{V_+^{\frac{\alpha-n}{2}}}{\Gamma(\frac{\alpha-n}{2}+1)} = \frac{\operatorname{Res}_{\lambda=k-\frac{n}{2}} V_+^{\lambda}}{\operatorname{Res}_{\lambda=k-\frac{n}{2}} \Gamma(\lambda+1)} = \tag{25}$$

$$= \frac{\operatorname{Res}_{\lambda=-(\frac{n}{2}-k)} V_+^{\lambda}}{\operatorname{Res}_{\lambda=-(\frac{n}{2}-k)} \Gamma(\lambda+1)}.$$

Por otra parte, de ([6]) se tiene las siguientes fórmulas:

$$\operatorname{Res}_{\lambda=-k, k=1,2,..} V_+{}^{\lambda} = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \delta^{(k-1)}(V), \tag{26}$$

si $k < \frac{n}{2}, a_1, \ldots a_\mu > 0$ y $a_{\mu+1}, \ldots a_{\mu+\nu} < 0$,

$$\operatorname{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2}-k, k=0,1,2,..} V_+^{\lambda} = 0 \tag{27}$$

si μ es par y ν impar, $a_1, \ldots a_\mu > 0$ y $a_{\mu+1}, \ldots a_{\mu+\nu} < 0$,

$$\operatorname{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2}-k, k=0,1,2,..} V_+^{\lambda} = \frac{(-1)^{\frac{\nu}{2}} \pi^{\frac{n}{2}}}{2^{2k} k! \Gamma(\frac{n}{2}+k)} L_a^k \{\delta(x)\} \tag{28}$$

si μ es impar y ν par, $a_1, \ldots a_\mu > 0$ y $a_{\mu+1}, \ldots a_{\mu+\nu} < 0$,

$$\operatorname{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2}-k, k=0,1,2,..} V_+^{\lambda} = \frac{(-1)(-1)^{\frac{\nu}{2}} \pi^{\frac{n}{2}}}{2^{2k} k! \Gamma(\frac{n}{2}+k)} L_a^k \{\delta(x)\} \tag{29}$$

si μ y ν son pares, $a_1, \ldots a_\mu > 0$ y $a_{\mu+1}, \ldots a_{\mu+\nu} < 0$ y

$$\operatorname{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2}-k, k=0,1,2,..} V_+^{\lambda} = \frac{(-1)(-1)^{\frac{\nu+1}{2}} \pi^{\frac{n}{2}-1}}{2^{2k} k! \Gamma(\frac{n}{2}+k)} \left[\psi(\frac{\mu}{2}) - \psi(\frac{n}{2}) \right] L_a^k \{\delta(x)\} \tag{30}$$

si μ y ν son impares, $a_1, \ldots a_\mu > 0$ y $a_{\mu+1}, \ldots a_{\mu+\nu} < 0$, donde L_a es el operador definido por

$$L_a = \frac{1}{a_1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{1}{a_\mu} \frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2} + \frac{1}{a_{\mu+1}} \frac{\partial^2}{\partial x_{\mu+1}^2} + \ldots + \frac{1}{a_{\mu+\nu}} \frac{\partial^2}{\partial x_{\mu+\nu}^2} \tag{31}$$

si $a_1, \ldots a_\mu > 0$ y $a_{\mu+1}, \ldots a_{\mu+\nu} < 0$,

$$\psi(x) = \frac{\Gamma^{`}(x)}{\Gamma(x)} \tag{32}$$

y para enteros no negativos y números fraccionarios no negativos los valores del argumento de $\psi(x)$ estan dados por

$$\psi(k) = -C + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k-1}, k = 2,3,\ldots \tag{33}$$

y

$$\psi(k+\frac{1}{2}) = -C - 2\ln 2 + 2(1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2k-1}), k = 1,2,3,\ldots \tag{34}$$

y C es la constante de Euler.

Por otra parte, de (26) se tiene:

1) μ par y ν par (n par)

$$\operatorname{Res}_{\beta=-(\frac{n}{2}-k)} V_+^{\beta} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}-k-1}}{(\frac{n}{2}-k-1)!}\delta^{(\frac{n}{2}-k-1)}(V) \tag{35}$$

si $\frac{n}{2} - k < \frac{n}{2}, \frac{n}{2} - k = 1,2,3,\ldots$ y

2) μ impar y ν impar (n par)

$$\operatorname{Res}_{\beta=-(\frac{n}{2}-k)} V_+^{\beta} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}-k-1}}{(\frac{n}{2}-k-1)!}\delta^{(\frac{n}{2}-k-1)}(V) \tag{36}$$

si $\frac{n}{2} - k < \frac{n}{2}, \frac{n}{2} - k = 1,2,3,\ldots$

De (24), (25), (35), (36) y considerando la fórmula

$$\operatorname{Res}_{z=-k} \Gamma(z) = \frac{(-1)^k}{k!} \tag{37}$$

bajo las condiciones $a_1, \ldots a_\mu > 0$ y $a_{\mu+1}, \ldots a_{\mu+\nu} < 0,$ se tiene

$$\lim_{\alpha \to 2k} \frac{V_+^{\frac{\alpha-n}{2}}}{\Gamma(\frac{\alpha-n}{2}+1)} = \begin{cases} \frac{V_+^{k-\frac{n}{2}}}{\Gamma(k-\frac{n}{2}+1)} \text{para } n \text{ impar,} \\ \text{pero también es válido para } n \text{ par} \\ \text{bajo la condición } k \geq \frac{n}{2} \text{ y} \\ \delta^{(\frac{n}{2}-k-1)}(V) \text{ para } n \text{ para y } k < \frac{n}{2}. \end{cases} \tag{38}$$

Por otra parte, poniendo $m = 1$ en (22) y (23) se tiene

$$B_\alpha(V) = \frac{V_+^{\frac{\alpha-n}{2}}}{(-1)^{\frac{\mu-1}{2}} H_{1,n}(\alpha)} \tag{39}$$

si $\mu = 2s+1, s = 0,1,2,\ldots$ y

$$B_\alpha(V) = \frac{\cos\frac{\alpha\pi}{2}.V_+^{\frac{\alpha-n}{2}}}{(-1)^{\frac{\mu}{2}}sen\frac{\alpha\pi}{2}.H_{1,n}(\alpha)} \tag{40}$$

si $\mu = 2s, s = 0,1,2,\ldots$ y de ([6]) se tiene la siguiente fórmula

$$B_\alpha^*(V) = \begin{cases} \frac{B_\alpha(V)}{d_{\alpha,1,n}} \text{si } \mu = 2s \text{ y } \nu = 2t+1 \\ \\ 0 \text{ para otros casos} \end{cases} \tag{41}$$

donde

$$H_{1,n}(\alpha) = H_n(\alpha) = \pi^{\frac{n-2}{2}}2^{\alpha-1}\Gamma(\frac{\alpha}{2})\Gamma(\frac{\alpha-n}{2}+1) \tag{42}$$

y

$$d_{\alpha,1,n} = d_{\alpha,n} = 2^{-1}\Gamma(\frac{\alpha}{2})\Gamma(1-\frac{\alpha}{2}). \tag{43}$$

De (39) y (42) se tiene

$$B_{2k}(V) = \lim_{\alpha\to 2k} \frac{V_+^{\frac{\alpha-n}{2}}}{(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}H_{1,n}(\alpha)} =$$

$$= \frac{1}{\pi^{\frac{n-2}{2}}2^{2k-1}\Gamma(k)}\lim_{\alpha\to 2k}\frac{V_+^{\frac{\alpha-n}{2}}}{\Gamma(\frac{\alpha-n}{2}+1)} \tag{44}$$

si μ es impar. Por tanto, de (38) y (44) bajo las condiciones $a_1,\ldots a_\mu > 0$ y $a_{\mu+1},\ldots a_{\mu+\nu} < 0,$ se tiene

1. μ impar y ν para (n par)

$$B_{2k}(V) = \frac{1}{\pi^{\frac{n-2}{2}}2^{2k-1}\Gamma(k)}\frac{V_+^{k-\frac{n}{2}}}{\Gamma(k-\frac{n}{2}+1)} \tag{45}$$

si $k \geq \frac{n}{2}$,

2. μ impar y ν impar (n par)

$$B_{2k}(V) = \frac{1}{\pi^{\frac{n-2}{2}}2^{2k-1}\Gamma(k)}\frac{V_+^{k-\frac{n}{2}}}{\Gamma(k-\frac{n}{2}+1)} \tag{46}$$

si $k \geq \frac{n}{2}$ y

$$B_{2k}(V) = \frac{1}{(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}\pi^{\frac{n-2}{2}}2^{2k-1}\Gamma(k)}\delta^{(\frac{n}{2}-k-1)} \tag{47}$$

si $k < \frac{n}{2}$ y

3. μ par y ν impar (n impar)

$$B_{2k}(V) = \frac{(-1)^k}{(-1)(-1)^{\frac{\mu}{2}}\pi^{\frac{n-2}{2}}2^{2k-1}\Gamma(k)} \lim_{\alpha\to 2k} \frac{V_+^{\frac{\alpha-n}{2}}}{\Gamma(\frac{\alpha-n}{2}+1)} = \tag{48}$$

$$= \frac{(-1)^k}{(-1)(-1)^{\frac{\mu}{2}}\pi^{\frac{n-2}{2}}2^{2k-1}\Gamma(k)} \frac{V_+^{k-\frac{n}{2}}}{\Gamma(k-\frac{n}{2}+1)}.$$

$$L_a^j\left\{\delta^{(k-1)}(V(x_{1,\ldots}x_n)\right\}$$

Lema: Sea $\delta^{(k-1)}(V(x_{1,\ldots}x_n))$ la distribución definida por (1) y L_a^j el operador iterado j veces definido por (31), entonces la siguiente fórmula es válida

$$L_a^j\{\delta^{(k-1)}(V(x_{1,\ldots}x_n))\} = \frac{2^{2j}\Gamma(\frac{n}{2}-k)}{\Gamma(\frac{n}{2}-(j+k))}\delta^{(k+j-1)}(V(x_{1,\ldots}x_n)) \tag{49}$$

para n impar y $(k+j) < \frac{n}{2}$ si n es para, $a_1,\ldots a_\mu > 0$ y $a_{\mu+1},\ldots a_{\mu+\nu} < 0.$

Demostración: De([8]) se tiene que la transformada de Fourier de $\delta^{(k-1)}(V(x_{1,\ldots}x_n)),$ está dada por la fórmula

$$\{\delta^{(k)}(V)\}^{\Lambda} = C(-k,n) \tag{50}$$

$$\left\{e^{-(-k+\frac{\nu}{2})\pi i}(N-i0)^{k-\frac{n}{2}} - e^{(-k+\frac{\nu}{2})\pi i}(N+i0)^{k-\frac{n}{2}}\right\}$$

si $a_1,\ldots a_\mu > 0$ y $a_{\mu+1},\ldots a_{\mu+\nu} < 0,$ donde el símbolo Λ significa Transformada de Fouriere,

$$C(-k,n) = \frac{1}{\sqrt[2]{|\Delta|}}2^{n-2k}\pi^{\frac{n-2}{2}}\Gamma(\frac{n}{2}-k)(2i)^{-1}, \tag{51}$$

Δ es el determinante de los coeficientes de V ,

$$N = N(s_1,\ldots s_n) = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j}s_j^2 \tag{52}$$

y

$$(N \pm i0)^{\lambda} = \lim_{N' \to 0} (N \pm iN')^{\lambda} \tag{53}$$

Por otra parte, de([7]) se tiene la siguiente fórmulas:

$$\{L_a^k \delta\}^{\Lambda} = e^{-k\pi i}\left(\frac{1}{a_1}s_1^2 + \ldots + \frac{1}{a_\mu}s_\mu^2 - \frac{1}{a_{\mu+1}}s_{\mu+1}^2 - \ldots - \frac{1}{a_{\mu+\nu}}s_{\mu+\nu}^2 \mp i0\right)^k \tag{54}$$

$$(V \pm i0)^{\lambda}.(V \pm i0)^{\mu} = (V \pm i0)^{\lambda+\mu}, \tag{55}$$

λ, μ y $\lambda + \mu \neq -\frac{n}{2} - k, k = 0, 1, 2, \ldots$ y

$$(V + i0)^k = (V - i0)^k = V^k \tag{56}$$

parar $k = 0, 1, 2, \ldots$

Demostración: Sabemos que $L_a^j \delta$ es una combinación lineal finita de δ y sus derivadas, por tanto $L_a^j \delta$ es un convolutor del espacio D' (espacio de distribuciones), esto es $L_a^j \delta$ es una distribución de clase O_c', donde O_c' es el espacio dual del espacio O_c ([10], p. 244). Por otra parte $\delta^{(k-1)}(V(x_{1,\ldots}x_n))$ es una distribución homogénea y usando ([13]), $\delta^{(k-1)}(V(x_{1,\ldots}x_n))$ es una distribución temperada, por tanto $\delta^{(k-1)}(V(x_{1,\ldots}x_n)) \in S'$ donde S' es el dual del espacio S de Schwartz, y usando el teorema clásico de L. Schwartz ([14], page 268, formula (II, 8, 5) podemos concluir la validez de la siguiente fórmula:

$$\left\{L_a^j \delta * \delta^{(k-1)}(V(x_{1,\ldots}x_n))\right\}^{\Lambda} = \left\{L_a^j \delta\right\}^{\Lambda}.\{\delta^{(k-1)}(V(x_{1,\ldots}x_n))\}^{\Lambda}, \tag{57}$$

donde el símbolo $*$ significa convolución. De (55) y usando las fórmulas (50), (54) y(56) se tiene

$$\left\{L_a^j \delta * \delta^{(k-1)}(M(x_{1,\ldots}x_n))\right\}^{\Lambda} = \frac{(-1)^k(-1)^k C(-k,n)}{C(-k-j,n)}\{\delta^{(k+j-1)}(V(x_{1,\ldots}x_n))\}^{\Lambda} \tag{58}$$

para n impar y bajo la condición $(k+j) < \frac{n}{2}$ si n es par. De (58) y usando (51) se tiene

$$\begin{aligned} L_a^j \delta * \delta^{(k-1)}(V(x_{1,\ldots}x_n) &= \\ &= \frac{2^{2k}\Gamma(\frac{n}{2}-k)}{\Gamma(\frac{n}{2}-(j+k))}\delta^{(k+j-1)}(V(x_{1,\ldots}x_n)) \end{aligned} \tag{59}$$

para n impar y bajo la condición $(k+j) < \frac{n}{2}$ si n es par, $a_1, \ldots a_\mu > 0$ and $a_{\mu+1}, \ldots a_{\mu+\nu} < 0.$ De (59) se obtiene la fórmula (49).

En paticular si $\frac{n}{2} - k \leq j < \frac{n}{2}$,

$$L_a^j\{\delta^{(k-1)}(V(x_{1,\ldots}x_n))\} = 0 \tag{60}$$

si n es par, $a_1, \ldots a_\mu > 0$ y $a_{\mu+1}, \ldots a_{\mu+\nu} < 0.$ Por tanto $\delta^{(k-1)}(V(x_{1,\ldots}x_n))$ es una solución homogénea del operador ultrahiperbólico operator iterated j time:

$$L_a^k = \left\{ \frac{1}{a_1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{1}{a_\mu} \frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2} + \frac{1}{a_{\mu+1}} \frac{\partial^2}{\partial x_{\mu+1}^2} + \ldots + \frac{1}{a_{\mu+\nu}} \frac{\partial^2}{\partial x_{\mu+\nu}^2} \right\}^k \tag{61}$$

$a_1, \ldots a_\mu > 0$ y $a_{\mu+1}, \ldots a_{\mu+\nu} < 0.$ La fórmula(49) es una generalización de la fórmula(10) de ([A6]), en efecto haciendo $a_1 = a_2 = \ldots = a_\mu = 1, a_{\mu+1} = \ldots = a_{\mu+\nu} = -1$ en(49) se tiene

$$L^j\{\delta^{(k-1)}(P)\} = \frac{2^{2j}\Gamma(\frac{n}{2} - j)}{\Gamma(\frac{n}{2} - (j+k))} \delta^{(k+j-1)}(P) \tag{62}$$

si $j + k < \frac{n}{2}$, donde

$$P = P(x) = x_1^2 + \ldots + x_\mu^2 - x_{\mu+1}^2 - \ldots - x_{\mu+\nu}^2 \tag{63}$$

y

$$L = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{\mu+1}^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_{\mu+\nu}^2} \right\}. \tag{64}$$

La fórmula (62) aparece en ([10]). Es claro que poniendo $a_1 = a_2 = \ldots = a_\mu = 1, a_{\mu+1} = \ldots = a_{\mu+\nu} = -1$ en (60) si $\frac{n}{2} - k \leq j < \frac{n}{2}$, $\delta^{(k-1)}(P)$ es una solución homogénea del operador ultrahiperbólico.

$$L^j = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{\mu+1}^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_{\mu+\nu}^2} \right\}^j. \tag{65}$$

Haciendo $k = s+1, j = 1,$ $m = 1$ y $a_1 = a_2 = \ldots = a_\mu = 1, a_{\mu+1} = \ldots = a_{\mu+\nu} = -1$ en (60), se tiene que $\delta^{(s)}(P)$ es una solución homogénea del operador ultrahiperbólico L. Podemos observar que en particular si $s = \frac{n-4}{2}, \delta^{(s)}(P)$ es una solución homogénea del operador ultrahiperbólico L, donde L está definido por la fórmula (64).

La fórmula (49) no depende de la signatura de μ y ν donde $\mu + \nu = n$ es la dimensión del espacio. Haciendo $k = \frac{n}{2} - r$ en (49) con $\frac{n}{2} - r \geq 0$, para $n = 2r$, se tiene

$$L_a^j \left\{ \delta^{(\frac{n}{2}-r-1)}(V(x_{1,\ldots}x_n)) \right\} = \frac{2^{2j}\Gamma(r)}{\Gamma(-j+r))} \delta^{(\frac{n}{2}-r+j-1)}(V(x_{1,\ldots}x_n)). \tag{66}$$

si $j < r < \frac{n}{2} + j - 1.$ La fórmula (66) es una generalización de la fórmula (20) de ([10]), en efecto haciendo $a_1 = a_2 = \ldots = a_\mu = 1, a_{\mu+1} = \ldots = a_{\mu+\nu} = -1$ en (66), se tiene

$$L^j \left\{ \delta^{(\frac{n}{2}-r-1)}(P(x_{1,\ldots}x_n)) \right\} = \frac{2^{2j}\Gamma(r)}{\Gamma(r-j))} \delta^{(\frac{n}{2}-r+j-1)}(P(x_{1,\ldots}x_n)) \tag{67}$$

si $j < r < \frac{n}{2} + j - 1,$ donde $P(x_{1,\ldots}x_n)$ está definida en (63) y el operador L en (64). La fórmula (67) aparece en ([10]).

Por otra parte de(47), se tiene

$$\delta^{(\frac{n}{2}-k-1)}(V(x_{1,\ldots}x_n)) = (-1)^{\frac{\mu-1}{2}} \pi^{\frac{n-2}{2}} 2^{2k-1} \Gamma(k) B_{2k}(V) \tag{68}$$

si $a_1, \ldots a_\mu > 0$ y $a_{\mu+1}, \ldots a_{\mu+\nu} < 0.$ Ahora haciendo $m = 1$ en (([11]), fórmulas(25) y(26)), se tiene

$$L_a^k \{B_\alpha(V)\} = \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2})\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})(-1)^k}{\Gamma(\frac{\alpha}{2}-k)\Gamma(1-(\frac{\alpha}{2}-k))} B_{\alpha-2k}(V) \tag{69}$$

si $a_1, \ldots a_\mu > 0$ y $a_{\mu+1}, \ldots a_{\mu+\nu} < 0.$ De (68), (69) y usando la fórmula

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{sen(z\pi)} \tag{70}$$

se tiene

$$L_a^s \left\{ \delta^{(\frac{n}{2}-k-1)}(V(x_{1,\ldots}x_n)) \right\} = (-1)^{\frac{\mu-1}{2}} \pi^{\frac{n-2}{2}} 2^{2k-1} \Gamma(k) L_a^s \{B_{2k}(V)\}$$

$$= (-1)^{\frac{\mu-1}{2}} \pi^{\frac{n-2}{2}} 2^{2k-1} \Gamma(k) L_a^s \{B_{2(k-s)}(V)\} = \tag{71}$$

$$= \frac{\Gamma(k))}{2^{-2s}\Gamma((k-s)))} \delta^{(\frac{n}{2}-(k-s)-1)}(V(x_{1,\ldots}x_n))$$

si μ y ν son impares, $k > s,$ $k < \frac{n}{2} - 1, a_1, \ldots a_\mu > 0$ y $a_{\mu+1}, \ldots a_{\mu+\nu} < 0.$ La fórmula (71) es la fórmula (66).

Ahora considerando la fórmula:

$$B_{-2k}(V) = \frac{(-1)^{\frac{\nu+1}{2}}\Gamma(k+1)}{2^{-1}.2(-1)^{\frac{\mu-1}{2}} k!(-1)^{\frac{n}{2}-1}} L_a^k \{\delta(x)\} = (-1) L_a^k \{\delta(x)\} \tag{72}$$

si μ y ν son impares, $a_1, \ldots a_\mu > 0$ y $a_{\mu+1}, \ldots a_{\mu+\nu} < 0.$ ([11]), se tiene

$$L_a^s\left\{\delta^{(\frac{n}{2}-k-1)}(V(x_{1,\ldots}x_n))\right\} = T_{k,n}L_a^s\{B_{-2k}(V)\} = \tag{73}$$

$$= -T_{k,n}L_a^{s-k}\{\delta(x)\}$$

si $s-k \geq 0,\ a_1,\ldots a_\mu > 0$ y $a_{\mu+1},\ldots a_{\mu+\nu} < 0.$ Donde

$$T_{k,n} = (-1)^{\frac{\mu-1}{2}}\pi^{\frac{n-2}{2}}2^{2k-1}\Gamma(k). \tag{74}$$

De (73), (74) y usando (47) se tiene

$$L_a^s\left\{\delta^{(\frac{n}{2}-k-1)}(V(x_{1,\ldots}x_n))\right\} = -T_{k,n}L_a^{s-k}\{\delta(x)\} = \tag{75}$$

$$= (-1)(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}\pi^{\frac{n-2}{2}}2^{2k-1}\Gamma(k))L_a^{s-k}\{\delta(x)\}$$

si $k \leq s, k < \frac{n}{2}, a_1,\ldots a_\mu > 0$ y $a_{\mu+1},\ldots a_{\mu+\nu} < 0.$ Haciendo $k = s$ en (75),se tiene

$$L_a^s\left\{\delta^{(\frac{n}{2}-k-1)}(V(x_{1,\ldots}x_n))\right\} = \tag{76}$$

$$= (-1)(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}\pi^{\frac{n-2}{2}}2^{2k-1}\Gamma(k))\delta(x).$$

La fórmula (76), significa que

$$E_{n,k,\mu,\nu}(V) = \frac{1}{(-1)(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}\pi^{\frac{n-2}{2}}2^{2k-1}\Gamma(k))}\delta^{(\frac{n}{2}-k-1)}(V(x_{1,\ldots}x_n)) \tag{77}$$

es una solución elemental del operador L_a^s definido por la fórmula (61) si μ y ν son impares, $a_1,\ldots a_\mu > 0$ y $a_{\mu+1},\ldots a_{\mu+\nu} < 0.$ La fórmula (77) es una generalización de la fórmula (23) de ([10]), en efecto haciendo $a_1 = a_2 = \ldots = a_\mu = 1, a_{\mu+1} = \ldots = a_{\mu+\nu} = -1$ en (77) se tiene

$$E_{n,k,\mu,\nu}(P) = \frac{1}{(-1)(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}\pi^{\frac{n-2}{2}}2^{2k-1}\Gamma(k))}\delta^{(\frac{n}{2}-k-1)}(P(x_{1,\ldots}x_n)). \tag{78}$$

donde $P(x_{1,\ldots}x_n)$ es definida por la fórmula (63). La fórmula (78) aparece en en ([10])

REFERENCIAS

[1] Y. Nozaki, On Riemann-Liouville integral of Ultra-hyperbolic type, Kodai Mathematical Seminar Reports, Vol.6, Nº2, 69-87,1964.

[2] S.E. Trione, On Marcel Riesz Ultra-hyperbolic Kernel, Series I, (Preprint), Nº116, IAM-CONICET 1987.

[3] M.Riesz, L'integrale de Riemann-Liuoville et le Probleme de Cauchy, Acta Math. 81,1-223,1949.

[4] A. Erdelyi, Editor, Higher Transcendental Functions, Vol. I and II, McGraw-Hill, New York, 1953.

[5] Aguirre M.A., The distributional convolution product of Marcel Riesz, Ultra-hyperbolic Kernel,Revista de la Unión Matemática Argentina,Volumen 39, 1995.

[6] Aguirre M.A.,A generalization of the expansion in series(of Taylor types)of $(k-1)$ derivative of Dirac´s delta in m^2+P ,Integral Transform and Special Functions 2003,Vol. 14 (2), pp.117-127.

[7] Aguirre M.A., The residue of distribution $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 \pm i0\right)^{\lambda}$ por aparecer.

[8] Aguirre Manuel A., The Fourier Transform of $\delta^{(k-1)}(M(x_1,\ldots x_n)$ and $\delta^{(k-1)}(c^2+M(x_1,\ldots x_n))$,International Journal of Pure and Applied Mathematics, Volume 64, No. 3, 2010, pp.377-388.

[9] Aguirre Manuel A., A generalization of distributional convolution product of Y.Nozaki and M. Riesz Ultrahyperbolic kernel. to appear.

[10] Aguirre Manuel A.,Relations between the ultrahyperbolic operator and $(k-1)$ th derivative of Dirac´s delta in $P(x)$ and $P(x)-c^2$, in International Journal of Pure and Applied Mathematics, Volume 58, No. 4, 2010, pp.417-424.

[11] Aguirre Manuel A.,A generalization of Nozaki and Riesz Ulprahyperbolic kernel,to appear.

[12] I.M. Gelfand and G.E.Shilov, Generalized Functions, Vol. I, Academic Press, New York, 1964.

[13] Donoghue W.F.,Distributions and Fourier Transform,Academic Press,New York,(1969).

[14] Schwartz L.,Theorie des distributionns,Hermann,Paris,1966.

Manuel A. Aguirre, es Profesor y Decano de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Núcleo Consolidado Matemática Pura y Aplicada-NUCOMPA
Facultad de Ciencias Exactas UNCentro
Paraje Arroyo Seco, 7000-Tandil
Provincia de Buenos Aires, Argentina
Tel.: +54 2293 439657
E-mail: maguirre@exa.unicen.edu.ar