

INFLUENCIA DE LA TOLERANCIA RESIDUAL PARA EL CÁLCULO DE PARÁMETROS DE TRANSFORMACIÓN A PARTIR DE SOLUCIONES CR-SIRGAS

Dr.-Ing. Jorge Moya Zamora^{1,*}; Ing. Lorenzo David Aguilar Elizondo^{2,†}

¹Escuela de Topografía, Catastro y Geodesia. Universidad Nacional, Campus Omar Dengo, Avenida 1, Calle 9, Heredia, Costa Rica.

²Instituto de Desarrollo Rural, Inder – Moravia, Oficina San Vito, Coto Brus, Puntarenas, Costa Rica.

Recibido: 11-02-2026

Aceptado: 24-03-2026

DOI: <https://doi.org/10.5377/ce.v17i1.23101>

RESUMEN

En esta investigación se analizó el comportamiento temporal de los parámetros de transformación semanales obtenidos a partir de las soluciones finales de coordenadas geocéntricas $[XYZ]^T$ de las estaciones GNSS de operación continua de Costa Rica, las cuales materializan el Marco Geodésico Nacional de Referencia CR-SIRGAS. Los conjuntos de parámetros se determinaron aplicando el modelo de transformación de similitud Molodensky-Badekas. Dichos parámetros de transformación y sus tasas de variación anual se estimaron para un período comprendido entre las épocas 2019,24 y 2022,90, procesando un total de 191 semanas de soluciones semanales finales.

El estudio se centró en analizar los resultados de los procesos de transformación contemplando valores de tolerancia de ± 10 mm, ± 20 mm y ± 30 mm y su influencia en el comportamiento estadístico de los residuales. Los resultados mostraron que las traslaciones presentaron magnitudes inferiores a 10 mm y variaciones anuales significativas, mientras que las rotaciones fueron mínimas, con variaciones menores a 5 milisegundos de arco por año.

La investigación demostró también, que una tolerancia de ± 30 mm permitió obtener conjuntos de parámetros a partir de configuraciones geodésicas adecuadas tanto en el componente espacial como en el estocástico. Asimismo, se observará que las diferencias de coordenadas crecieron casi linealmente con el tiempo transcurrido entre épocas, siendo más notorias en el componente norte.

Palabras clave: CR-SIRGAS, tolerancia, transformación de similitud, residuales.

ABSTRACT

In this research, the temporal behavior of the weekly transformation parameters obtained from the final solutions of geocentric coordinates $[XYZ]^T$ of continuously operating GNSS stations in Costa Rica was analyzed. These stations materialize the National Geodetic Reference Frame CR-SIRGAS. The sets of parameters were determined by applying the Molodensky-Badekas similarity transformation model. The transformation parameters and their annual rates of variation were estimated for the period between epochs 2019.2400 and 2022.9000, processing a total of 191 weeks of final weekly solutions.

The study focused on analyzing the results of the transformation processes considering tolerance values of ± 10 mm, ± 20 mm, and ± 30 mm, and their influence on the statistical behavior of the residuals.

*jorge.moya.zamora@una.cr.  <https://orcid.org/0000-0001-6953-4885>

†lorenzoaguilare@gmail.com.  <https://orcid.org/0009-0002-5571-3510>

The results showed that the translations exhibited magnitudes below 10 mm with significant annual variations, while the rotations were minimal, with variations smaller than 5 milliarcseconds per year.

The research demonstrated that a tolerance of ± 30 mm made it possible to obtain sets of parameters from geodetic configurations that were appropriate in both the spatial and stochastic components. Likewise, it was observed that the coordinate differences increased almost linearly with the elapsed time between epochs, being more noticeable in the north component.

Keywords: CR-SIRGAS, tolerance, similarity transformation, residuals.

1 Introducción

1.1 La relación entre los marcos geodésicos de referencia

Los marcos de referencia tridimensionales se relacionan mediante un conjunto de parámetros que definen la denominada transformación de similitud o transformación de Helmert ([Hofmann-Wellenhof y Moritz, 2005](#)). Los conjuntos de parámetros de transformación corresponden a tres traslaciones, tres rotaciones y un factor de escala, los cuales se estiman a partir de las coordenadas geocéntricas de puntos idénticos, es decir, de puntos o estaciones que poseen una determinación simultánea en ambos marcos de referencia que se pretenden vincular ([Hofmann-Wellenhof et al., 2008](#)). La expresión matemática general de la transformación de coordenadas se presenta a continuación por medio de la ecuación 1 ([Zhiping et al., 2014](#)) y ([Tran et al., 2022](#)):

$$X_B = T + mRX_A \quad (1)$$

Donde:

X_B : vector de coordenadas en el sistema B

T : vector de traslaciones

m : factor de escala

R : matriz de rotación

X_A : vector de coordenadas en el sistema A

Este modelo matemático se conoce bajo la definición de Bursa-Wolf la cual constituye una variante del modelo clásico y se emplea para relacionar marcos de referencia geodésicos en áreas espaciales de gran extensión, siendo por ello más adecuada para aplicaciones de carácter internacional ([Altamimi et al., 2016](#)) y ([Altamimi et al., 2023](#)). En contraste, el modelo de transformación Molodensky-Badekas representa una modificación del enfoque Bursa-Wolf, diseñada para la transformación de coordenadas tridimensionales entre sistemas geodésicos distintos en regiones de menor extensión ([Hofmann-Wellenhof y Moritz, 2005](#)). De acuerdo con [Novikova et al. \(2020\)](#), la transformación clásica se realiza con respecto al centro de masas de la Tierra, mientras que el modelo de Molodensky-Badekas efectúa la transformación en torno a un punto base o centroide definido por los puntos homólogos, denominado baricentro.

Matemáticamente, los modelos pueden expresarse mediante una fórmula linealizada, la cual permite aplicar el proceso de ajuste de mínimos cuadrados para la estimación de los parámetros de transformación, optimizando el proceso y con esto minimizando las discrepancias entre los sistemas de referencia ([Torge y Müller, 2012](#)) y ([Kheloufi y Dehni, 2023](#)).

Por otra parte, el actual marco de referencia geodésico en Costa Rica denominado CR-SIRGAS corresponde con la referencia moderna, sustentado en observaciones GNSS provenientes de un conjunto de

estaciones GNSS de operación continua. Particularmente, el Instituto Geográfico Nacional de Costa Rica (IGNCR) es la entidad responsable de la definición y publicación de los parámetros oficiales de transformación, necesarios para la correcta gestión y compatibilización de la información geoespacial en las distintas épocas asociadas a las actualizaciones del mencionado marco de referencia (Moya *et al.*, 2021). A lo largo del tiempo, se han desarrollado diversas investigaciones orientadas a la estimación de conjuntos de parámetros de transformación, empleando metodologías tanto estáticas como cinemáticas, estas últimas incorporando la variabilidad temporal de los parámetros, tal y como se documenta en los trabajos de Moya *et al.* (2021) y Aguilar (2025).

1.2 Modelo de transformación de 14 parámetros

El modelo expresado en la ecuación 1 corresponde a una solución estática, la cual puede extenderse y adaptarse para su aplicación como modelo cinemático de catorce parámetros de transformación (Tran *et al.*, 2022). En este enfoque se consideran los siete parámetros clásicos previamente mencionados, así como sus variaciones temporales a lo largo de un período definido, permitiendo modelar los desplazamientos y deformaciones de los marcos de referencia en el tiempo (Soler, 1998), (Soler y Marshall, 2002) y (Soler y Marshall, 2003).

Este modelo permite obtener resultados de mayor precisión en comparación con otros métodos de transformación (Altamimi *et al.*, 2023). Su formulación matemática establece la relación entre la posición de un punto o de un parámetro de transformación en una época específica y la misma posición o parámetro en una época de referencia, considerando la velocidad de desplazamiento espacial de los parámetros de transformación durante un intervalo de tiempo determinado. Este desplazamiento se modela principalmente mediante un enfoque de regresión lineal, como se ilustra a continuación (Tran *et al.*, 2022).

$$x_A(t) = x_A(t_0) + \dot{x}_A(t_0)(t - t_0) \quad (2)$$

A partir de las ecuaciones 1 y 2, es posible derivar la ecuación 3, que representa la formulación del modelo lineal de transformación cinemática. Esta expresión se fundamenta en el desarrollo matemático presentado por Soler (1998), Soler y Marshall (2002) y Soler y Marshall (2003).

$$x_B = T_x + mR[[x_A(t_0) + \dot{x}_A(t_0)(t - t_0)]] + [[\dot{T}_x + [\dot{m}R + m\dot{R}]x_A(t_0)]](t - t_0) \quad (3)$$

1.3 Variaciones temporales de los parámetros de transformación

En la geodesia moderna los parámetros de transformación entre marcos de referencia no siempre se consideran estáticos, dado que los sistemas geodésicos y las estaciones GNSS experimentan desplazamientos y deformaciones a lo largo del tiempo (Bitharis *et al.*, 2018). Por esta razón, surge la necesidad de estudiar las series temporales de parámetros de transformación, las cuales representan la evolución de las traslaciones, rotaciones y escala a lo largo de diferentes épocas (Soler y Marshall, 2003) y (Altamimi *et al.*, 2023). Estas series permiten modelar de manera precisa la relación entre coordenadas en distintos momentos, considerando no solo la geometría inicial, sino también las variaciones dinámicas del sistema de referencia.

El análisis de las variaciones temporales en los parámetros de transformación proporciona información sobre la estabilidad y consistencia de los marcos de referencia, permitiendo identificar tendencias, anomalías y posibles errores sistemáticos en la red de estaciones. Además, facilita la integración de datos GNSS y la actualización de redes geodésicas nacionales y regionales, asegurando que los sistemas de referencia mantengan un alto nivel de exactitud a lo largo del tiempo (Kheloufi y Dehni, 2023) y (Zhiping *et al.*, 2014).

Finalmente, estos procesos resultan fundamentales para aplicaciones de geodesia de precisión, estudios geodinámicos, monitorización de deformaciones de la corteza terrestre y proyectos que requieren alta exactitud, como redes GNSS continuas o la integración de sistemas regionales con marcos internacionales (Altamimi *et al.*, 2023).

2 Metodología

2.1 Establecimiento del período del estudio

Esta investigación se fundamentó en el uso de las soluciones semanales finales brindadas por SIRGAS, las cuales contienen las coordenadas geocéntricas de las estaciones GNSS de medición continua, que materializan el marco de referencia costarricense CR-SIRGAS, complementadas con otras estaciones GNSS distribuidas en el territorio nacional e integradas a la red continental SIRGAS-CON. La Figura 1 presenta la configuración espacial de las 18 estaciones empleadas, mientras que en la Tabla 1 se muestra el periodo en el que se llevó a cabo el estudio indicando la semana de inicio, algunas intermedias y finalmente la última semana empleada, para un total de 191 semanas involucradas.

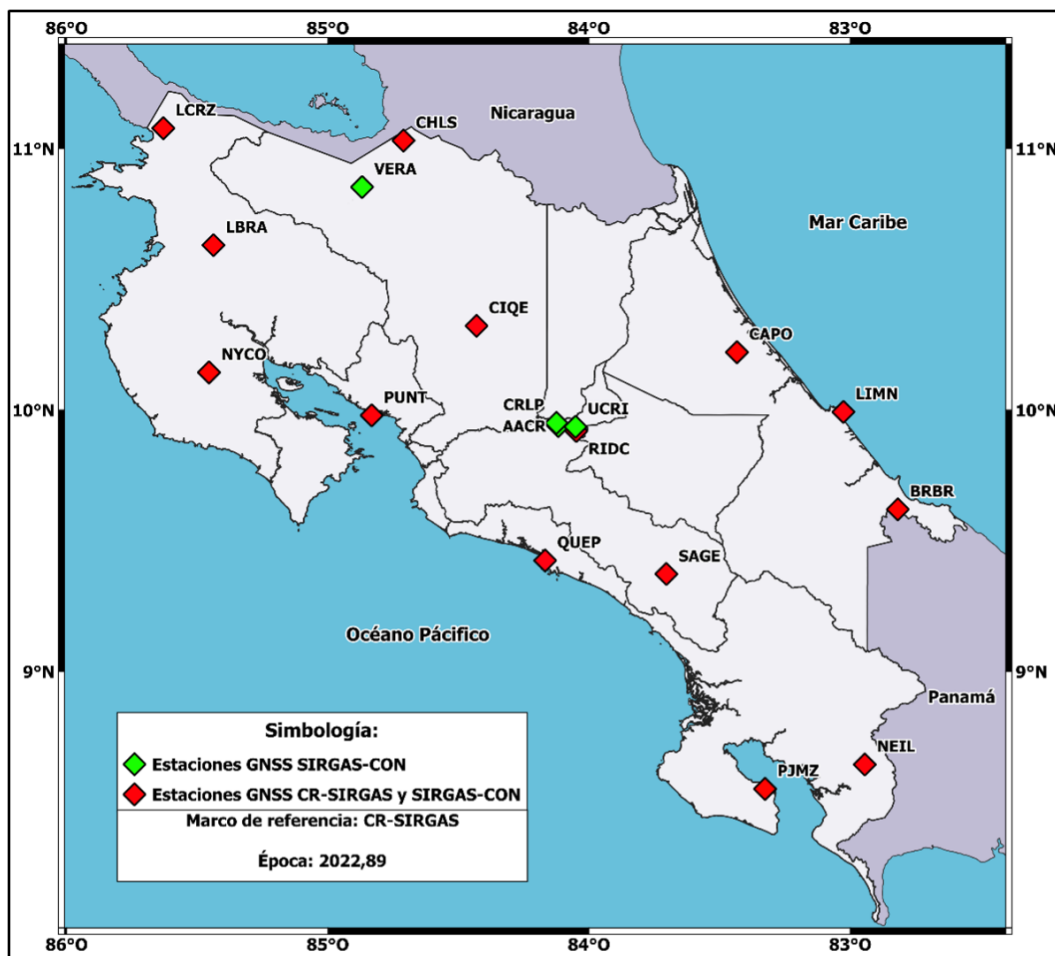


Figura 1: Distribución espacial de las estaciones GNSS de operación continua de Costa Rica incluidas en la red SIRGAS-CON así como las que materializan actualmente el marco geodésico nacional de Costa Rica CR-SIRGAS. Fuente: elaboración propia a partir de Aguilar (2025).

Tabla 1: Periodo que comprende las coordenadas geocéntricas referidas al marco IGb14 que se utilizaron en la investigación. Fuente: elaboración propia a partir de [Aguilar \(2025\)](#).

Semana	Fecha	Época	Tipo de solución
2046	27/3/2019	2019,2356	Soluciones semanales finales en coordenadas geométricas (XYZ) de las estaciones que materializan CR-SIRGAS y enlazadas a la solución del Servicio Internacional de GNSS (IGS) denominada como IGb14.
2047	3/4/2019	2019,2548	
2048	10/4/2019	2019,2740	
...	...	...	
2235	9/11/2022	2022,8575	
2236	16/11/2022	2022,8767	
2237	23/11/2022	2022,8959	

2.2 Programación de rutinas de cálculo

El desarrollo de la investigación implicó el manejo de un volumen significativo de información correspondiente a más de tres años de soluciones semanales para 14 estaciones GNSS. Considerando que la gestión manual de grandes conjuntos de datos pudo resultar compleja y propensa a errores, se crearon cuatro rutinas de cálculo orientadas a automatizar los distintos procedimientos matemáticos y facilitar el procesamiento de la información. Las rutinas fueron diseñadas en el entorno GNU Octave versión 8.3.0 ([GNU Octave Community, 2023](#)), un medio computacional de libre acceso y código abierto, cuya descripción resumida es mostrada por medio de la Tabla 2.

Tabla 2: Resumen de las rutinas informáticas utilizadas en los procesos de cálculo. Fuente: elaboración propia a partir de [Aguilar \(2025\)](#).

Nombre de la rutina	Datos de entrada	Resultado
Velocidades_XYZ.m	Coordenadas X Y Z	Velocidades geocéntricas
Parametros_Transformacion.m	Coordenadas X Y Z	Conjunto de parámetros de transformación
Variaciones_Parametros_Transformacion.m	Conjunto de parámetros de transformación	Velocidades de los parámetros de transformación y modelo definitivo para la transformación de coordenadas
Transformacion_Coordenadas_XYZ.m	Coordenadas X Y Z	Diferencia de coordenadas para la validación del modelo de transformación de coordenadas

Los scripts implementados se desarrollaron siguiendo una estructura lógica directamente vinculada con la formulación matemática de los principios teóricos aplicados, tales como el ajuste por mínimos cuadrados, el modelo de transformación espacial de coordenadas y el modelo de regresión lineal, además de otras ecuaciones de uso habitual en la geodesia para la conversión de coordenadas entre planos cartográficos.

2.3 Escogencia de los valores de tolerancia

La determinación de los valores de tolerancia empleados en el cálculo de los parámetros de transformación se efectuó mediante un análisis exploratorio de datos, orientado a examinar el comportamiento de

los residuales topocéntricos (n , e , u) (Kheloufi y Dehni, 2023), obtenidos a partir del ajuste por mínimos cuadrados aplicado a las soluciones semanales finales. Dicho análisis se fundamentó en variables estadísticas descriptivas como los valores promedio, máximos, mínimos y rangos. Además, se complementó con representaciones gráficas tipo boxplot e histogramas, que permitieron identificar tendencias generales y la presencia de valores atípicos en las observaciones.

Los residuos mostraron un comportamiento comprendido entre ± 10 mm y ± 30 mm, por lo que, se definieron tres valores de tolerancia ± 10 mm, ± 20 mm y ± 30 mm. Estas tolerancias se aplicaron en el proceso de depuración de los datos originales, bajo un enfoque parcialmente estricto que permitió conservar la cantidad mínima de estaciones requeridas para los cálculos, sin comprometer la integridad del marco de referencia. Como resultado, se obtuvieron tres conjuntos de datos depurados, las cuales sirvieron como insumo para la estimación de los grupos de parámetros de transformación y para los análisis comparativos posteriores.

3 Resultados

3.1 Comportamiento del grupo de baricentros

Los grupos de baricentros estimados evidenciaron un comportamiento espacialmente disperso, con variaciones en direcciones opuestas. La Figura 2 ilustra la distribución espacial de dichos grupos de baricentros, donde el punto representado en color rojo corresponde al valor promedio adoptado para el modelo cinemático lineal de transformación de coordenadas. En dicha figura se observa que el valor promedio se localiza aproximadamente en el centro del territorio nacional producto de la buena configuración geométrica de las estaciones GNSS (ver Figura 1), mientras que los demás baricentros se distribuyen en su entorno, presentando una mayor dispersión hacia las provincias de Alajuela y San José.

3.2 Cálculo de los parámetros de transformación del modelo lineal cinemático

Se determinaron tres conjuntos de parámetros de transformación semanales, correspondientes a los tres conjuntos de datos generados tras la depuración de los datos originales. En cada proceso de cálculo se estimaron exclusivamente los parámetros asociados a las traslaciones y rotaciones.

La estimación de los parámetros de transformación bajo distintos valores de tolerancia permitió analizar la influencia del control de calidad de los datos sobre los resultados obtenidos. El escenario con una tolerancia de ± 10 mm representó el caso más estricto, en el cual la cantidad de soluciones semanales disponibles disminuyó significativamente. Por su parte, la tolerancia de ± 20 mm correspondió a un proceso menos restrictivo y con mayor disponibilidad de información por estación. Finalmente, la tolerancia de ± 30 mm representó un escenario sin restricciones, en el cual se incorporan la totalidad de soluciones semanales y estaciones incluidas en la Figura 1.

Sin embargo, los parámetros de transformación que conformaron el modelo definitivo fueron estimados a partir del conjunto de soluciones obtenidas bajo una tolerancia de ± 30 mm. Los valores correspondientes a las traslaciones resultaron de magnitud reducida, al no superar los 10 mm; la mayor traslación se presentó en el eje Y, con un valor de 6,86 mm, mientras que los desplazamientos en los ejes restantes fueron inferiores a 2,00 mm, tal y como se muestra en la Tabla 3. En cuanto a las rotaciones, los valores que mejor se ajustaron al modelo empleado fueron de orden bajo, menores a 4 milésimos de segundo de arco (mas). Este comportamiento evidenció que, durante el periodo analizado, los ejes experimentan rotaciones mínimas, consideradas insignificantes desde el punto de vista geométrico y detectables únicamente mediante técnicas geodésicas de alta precisión.

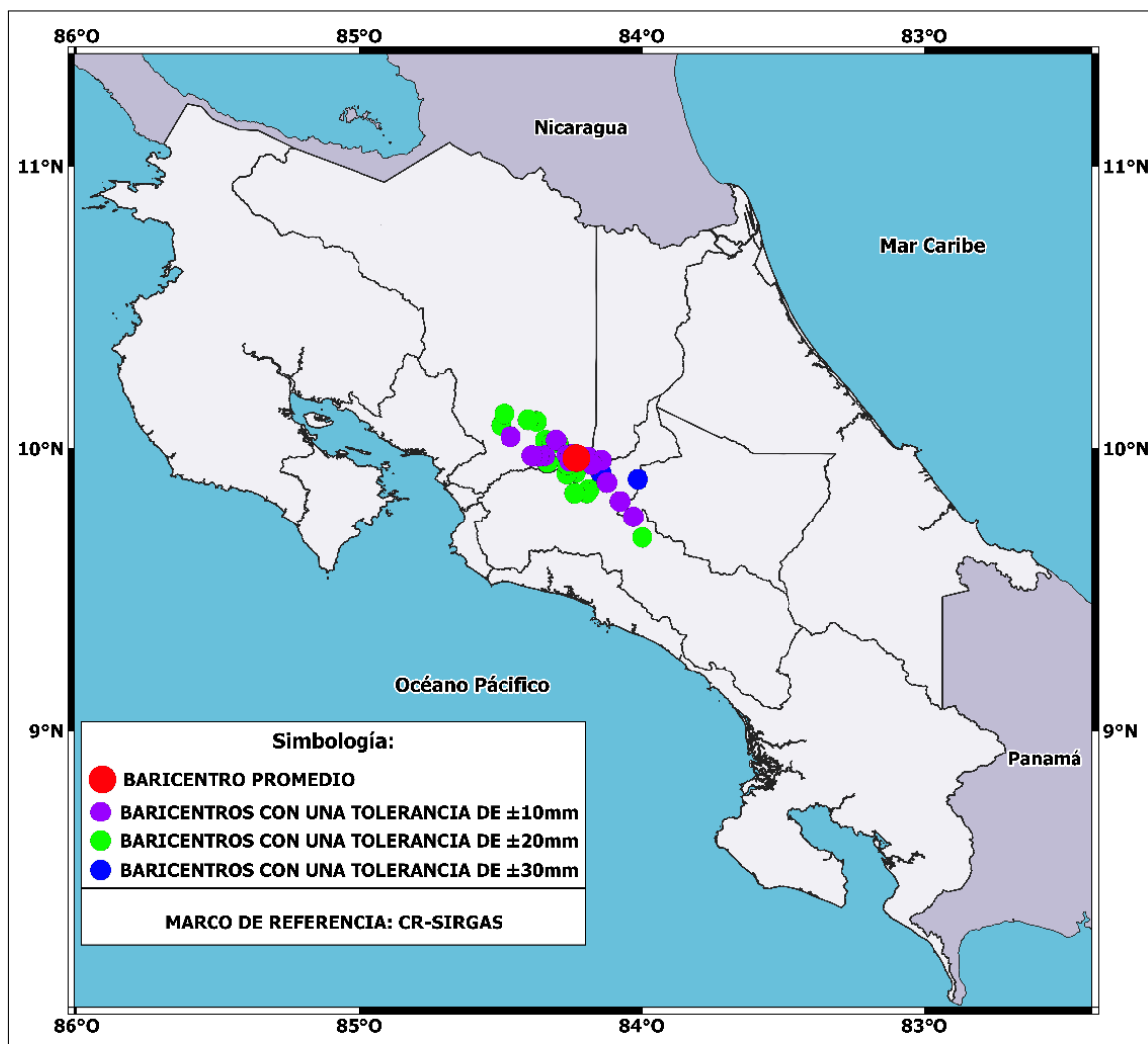


Figura 2: Comportamiento del grupo de baricentros estimados por medio de los conjuntos de datos que respondieron a un valor de tolerancia en específico. Fuente: elaboración propia a partir de Aguilar (2025).

Tabla 3: Conjunto de parámetros de transformación y sus respectivas variaciones temporales referidos a la época 2019,24 que dan origen al modelo lineal de transformación cinemático de coordenadas Fuente: elaboración propia a partir de [Aguilar \(2025\)](#).

Parámetro	Valor
TX	-1,51 mm ± 0,25 m
TY	+6,86 mm ± 0,56 m
TZ	-1,85 mm ± 0,27 m
RX	-3,37 mas ± 0,96 mas
RY	+1,25 mas ± 0,46 mas
RZ	+1,64 mas ± 0,92 mas
V_{TX}	+14,46 mm/año ± 0,12 mm/año
V_{TY}	+6,27 mm/año ± 0,26 mm/año
V_{TZ}	+17,20 mm/año ± 0,13 mm/año
V_{RX}	+2,75 mas/año ± 0,46 mas/año
V_{RY}	+3,58 mas/año ± 0,22 mas/año
V_{RZ}	-4,52 mas/año ± 0,44 mas/año
X0	631411,678 m
Y0	-6250445,332m
Z0	1096553,456 m

3.3 Variabilidad temporal de los parámetros de transformación

La variabilidad temporal de los parámetros de transformación se obtuvo por medio de la aplicación de un modelo de regresión lineal, el cual correspondió a una modificación de la ecuación 1 y hace referencia a lo descrito en [Soler \(1998\)](#), [Soler y Marshall \(2002\)](#) y [Soler y Marshall \(2003\)](#). Dicha formulación matemática se detalla por medio de la ecuación 4 y 5, que se detallan a continuación:

$$\begin{bmatrix} TX_{ti} \\ TY_{ti} \\ TZ_{ti} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} TX_{t0} \\ TY_{t0} \\ TZ_{t0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{TXt0} \\ v_{TYt0} \\ v_{TZt0} \end{bmatrix} (t_i - t_0) \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} RX_{ti} \\ RY_{ti} \\ RZ_{ti} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} RX_{t0} \\ RY_{t0} \\ RZ_{t0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{RXt0} \\ v_{RYt0} \\ v_{RZt0} \end{bmatrix} (t_i - t_0) \quad (5)$$

Donde:

$\begin{bmatrix} TX_{ti} & TY_{ti} & TZ_{ti} \end{bmatrix}^T$: vector de traslaciones destino

$\begin{bmatrix} TX_{t0} & TY_{t0} & TZ_{t0} \end{bmatrix}^T$: vector de traslaciones origen

$\begin{bmatrix} v_{TXt0} & v_{TYt0} & v_{TZt0} \end{bmatrix}^T$: vector de variaciones temporales de las traslaciones

$\begin{bmatrix} RX_{ti} & RY_{ti} & RZ_{ti} \end{bmatrix}^T$: vector de rotaciones destino

$\begin{bmatrix} RX_{t0} & RY_{t0} & RZ_{t0} \end{bmatrix}^T$: vector de rotaciones origen

$\begin{bmatrix} v_{RXt0} & v_{RYt0} & v_{RZt0} \end{bmatrix}^T$: vector de variaciones temporales de las rotaciones

Los valores obtenidos para las traslaciones fueron relativamente pequeños, no obstante, las tasas de cambio asociadas a estos parámetros resultaron significativas, ya que las variaciones anuales en los ejes X y Z fueron superiores a las observadas en el eje Y como lo detalla la Tabla 3. Por otro lado, la Tabla 3 muestra que las variaciones anuales de las rotaciones mostraron valores mayores que los parámetros rotacionales, aunque su magnitud fue relativamente baja, sin superar los 5,00 mas/año. Adicionalmente, las rotaciones evidenciaron una menor variabilidad anual en comparación con las traslaciones, indicando que las traslaciones ejercieron una influencia predominante. Lo anterior se muestra gráficamente por parte la Figura 3.

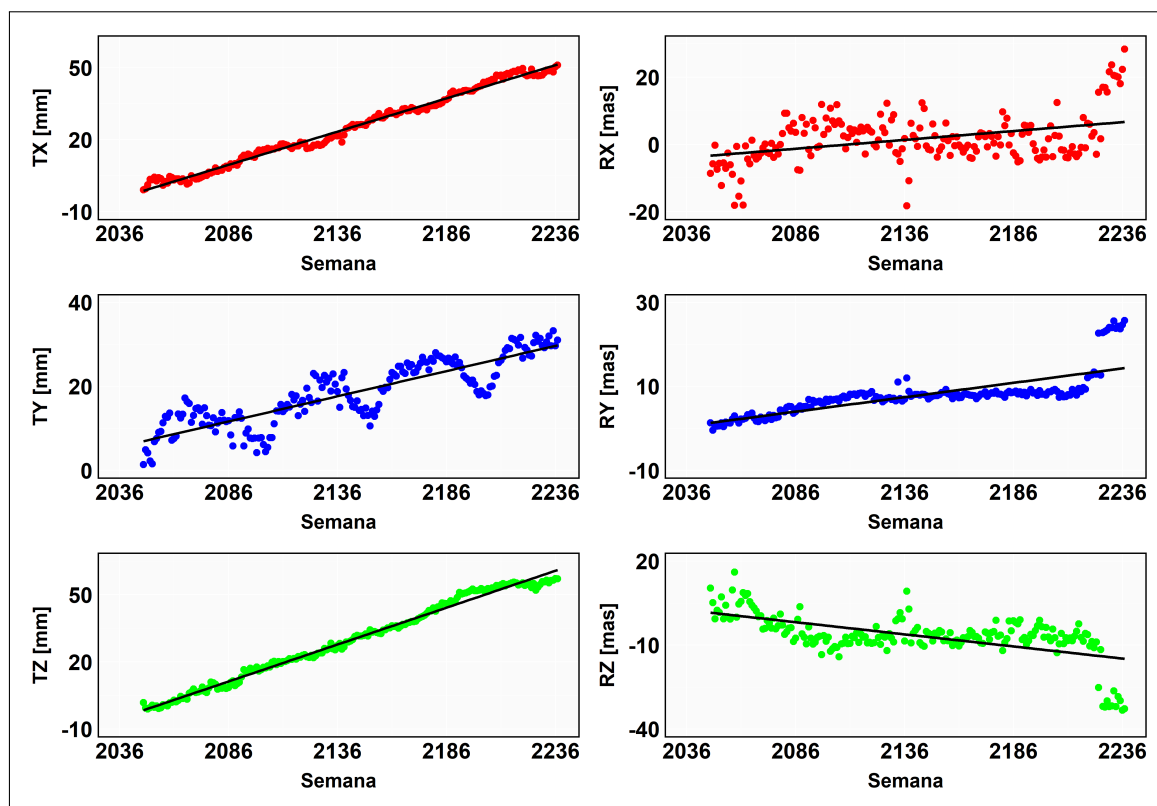


Figura 3: Variabilidad temporal de los parámetros de transformación durante el periodo de estudio Fuente: elaboración propia a partir de Aguilar (2025).

3.4 Aproximación del modelo obtenido

El proceso de validación del modelo de transformación de coordenadas se realizó mediante el script `Transformacion_Coordenadas_XYZ`, aplicando el modelo a distintos conjuntos de coordenadas geocéntricas. La validación principal se efectuó con 24 vértices pasivos geodésicos, tomando como época de origen 2019,24 y época objetivo 2021,53, cuya distribución espacial se muestra en la Figura 4. Además, es importante mencionar que todas las coordenadas estuvieron referidas al marco ITRF14.

En cada caso de validación se realizó la conversión de las coordenadas geocéntricas transformadas a coordenadas planas referidas a la proyección oficial para Costa Rica denominado como Costa Rica Transversa Mercator (CRTM05) (Moya *et al.*, 2021), con la finalidad de cuantificar las diferencias en el mismo plano cartográfico entre las coordenadas transformadas y las coordenadas de referencia u originales, estas siendo las de verificación. Estas diferencias de coordenadas se muestran gráficamente por medio de la Figura 5.

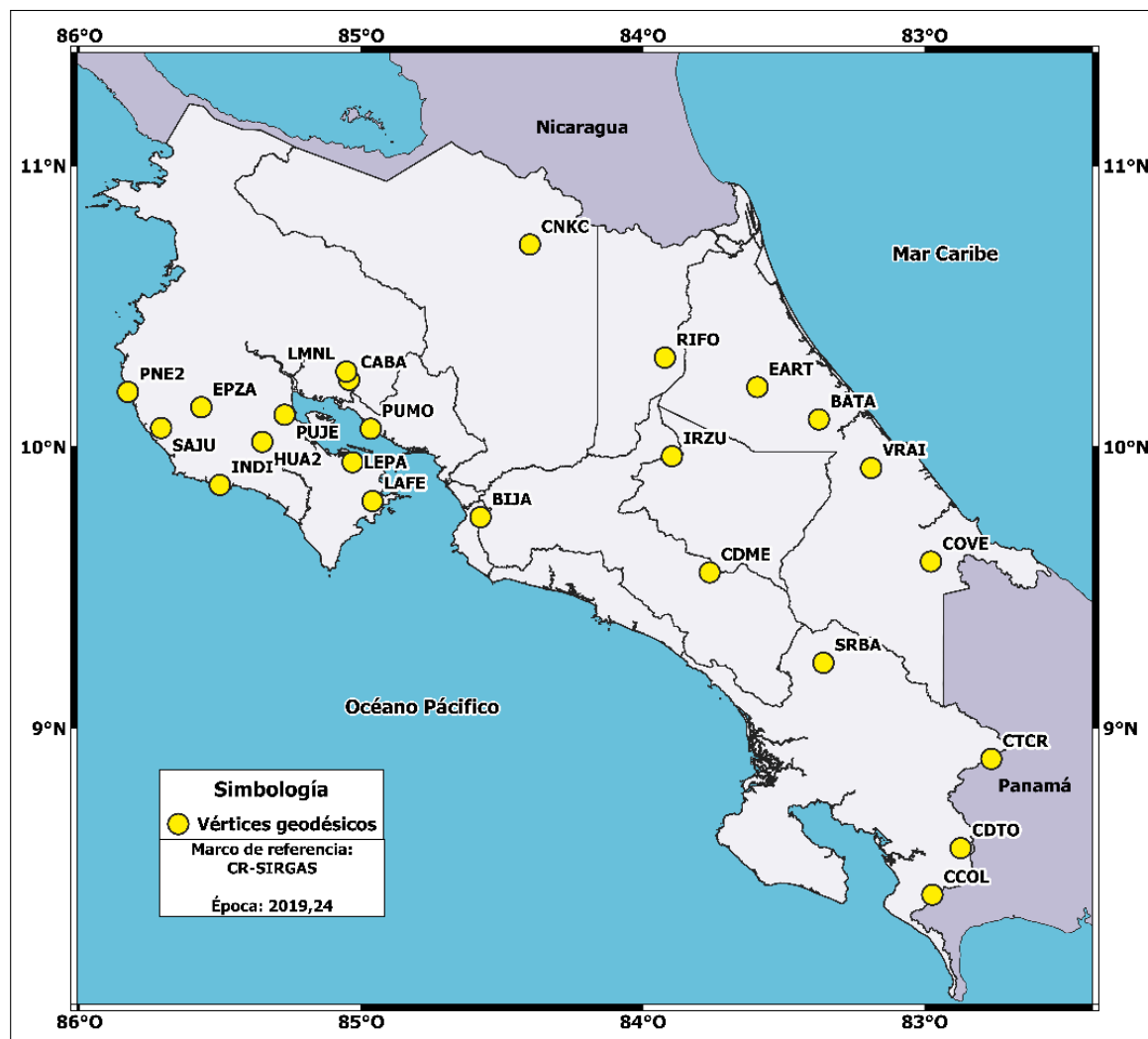


Figura 4: Distribución espacial de los vértices geodésicos utilizados en la validación del modelo de transformación. Fuente: elaboración propia a partir de [Aguilar \(2025\)](#).

Debido a la disponibilidad limitada de estaciones GNSS y vértices pasivos, se llevaron a cabo cuatro validaciones adicionales bajo condiciones controladas (caso B, C, D y E) utilizando coordenadas referidas a la solución del IGS denominada como IGB20. Aunque estas pruebas presentaron una menor calidad en los resultados, permitieron analizar la estabilidad temporal del modelo y su coherencia cinemática en intervalos de 6, 12, 18 y 24 meses, todos referidos a la época inicial $t_0 = 2022,92$. El propósito principal de referirlos a esa época, fue minimizar los efectos asociados al cambio de marco de referencia. La Figura 6 ilustra el comportamiento de las diferencias derivadas de las coordenadas geocéntricas transformadas en cada proceso con respecto a las originales, lo que permitió comparar la magnitud de las variaciones entre componentes y determinar las estaciones con mayor o menor estabilidad posicional a lo largo de los distintos intervalos analizados.

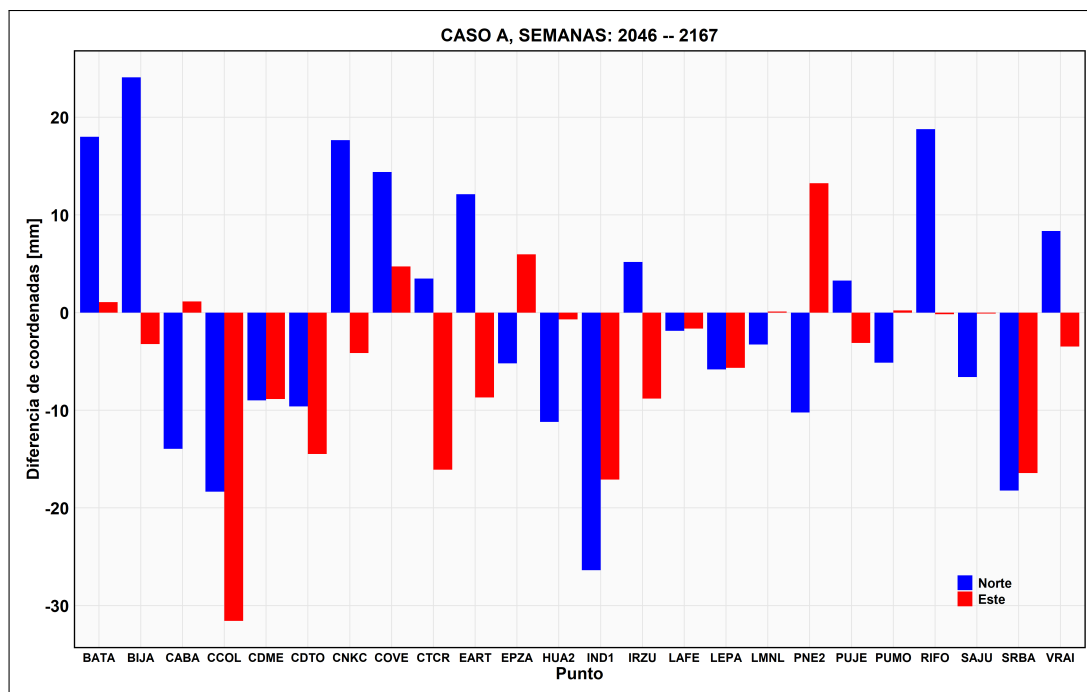


Figura 5: Diferencias de coordenadas planas transformadas de la semana 2046 a la semana 2167 Fuente: elaboración propia a partir de Aguilar (2025).

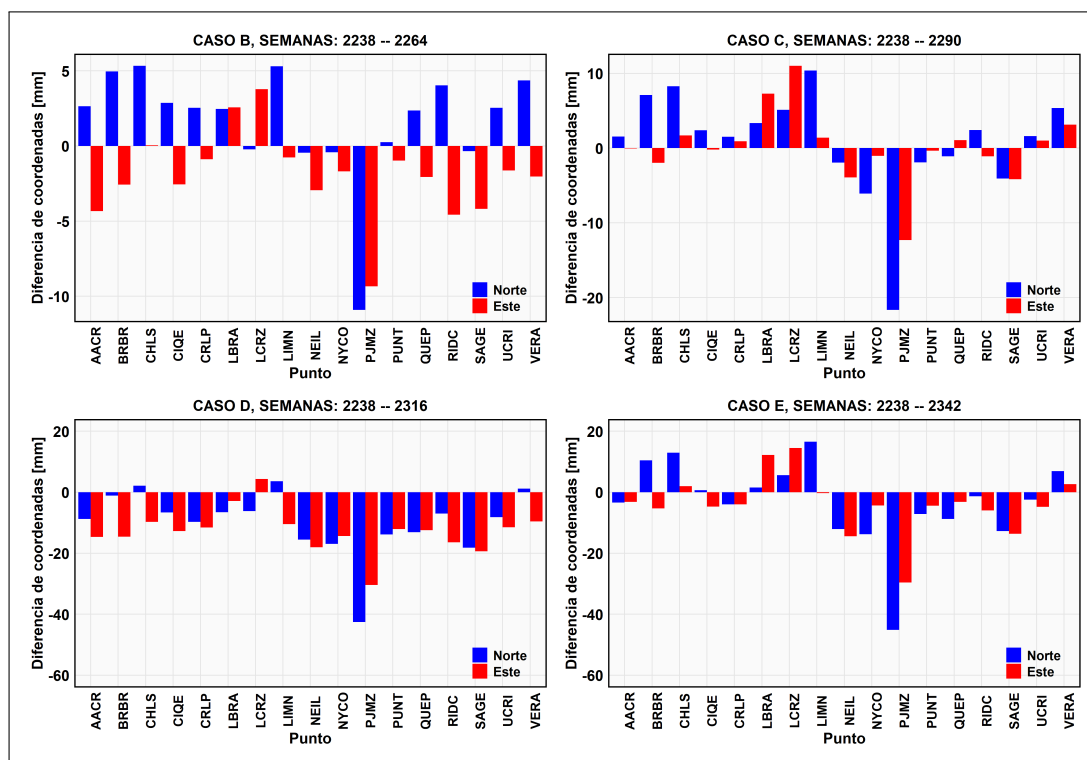


Figura 6: Diferencias de coordenadas planas transformadas para estaciones GNSS de medición continua entre distintas semanas de manera aproximada dentro del marco IGB20. Fuente: elaboración propia a partir de Aguilar (2025).

4 Discusión

El establecimiento de un valor de tolerancia para la depuración de la base de datos empleada en el cálculo de los parámetros de transformación tuvo como propósito principal controlar la dispersión de las diferencias entre coordenadas homólogas y asegurar la consistencia estadística. En una primera etapa, la aplicación de una tolerancia de ± 10 mm resultó ser sumamente estricta, ocasionando la exclusión de un número considerable de puntos homólogos. Esta reducción de datos comprometió tanto la representatividad espacial como la integridad del marco de referencia, al disminuir la capacidad del modelo para describir adecuadamente los parámetros de transformación y preservar la estabilidad del sistema. En consecuencia, se logró reevaluar el valor de tolerancia, adoptando valores de ± 20 mm y ± 30 mm con el fin de alcanzar un equilibrio entre la rigurosidad matemática y la integridad del marco de referencia, el cual, dadas las observaciones que lo sustentan, puede considerarse de alta calidad.

En la estimación de los parámetros de transformación, las traslaciones presentaron un comportamiento distinto al de las rotaciones. Aunque se observaron variaciones según la tolerancia aplicada, las diferencias fueron menores en magnitud respecto a las rotaciones, evidenciando dinámicas independientes entre ambos grupos de parámetros. En particular, las traslaciones en los ejes X y Z mostraron una clara tendencia lineal, con un ajuste consistente al modelo empleado tal y como lo muestra la Figura 3, especialmente en los resultados obtenidos con una tolerancia de ± 30 mm, que ofrecieron la mejor representación del comportamiento lineal.

Por otro lado, las rotaciones derivadas de tolerancias de ± 10 mm y ± 20 mm difirieron significativamente de las obtenidas con ± 30 mm, lo que destacó la necesidad de contar con un número suficiente de puntos homólogos; al menos siete puntos definieron resultados estables y confiables para los parámetros de transformación en esta investigación. Adicionalmente, las rotaciones carecieron de linealidad, como lo muestra la Figura 3, ante esta situación se determinó que se hubiera requerido de un modelo de orden superior para su adecuada representación. Sin embargo, sus magnitudes fueron bajas, con variaciones menores a 40 milisegundos de arco, indicando que no resultaron significativas. Los resultados obtenidos, permitieron identificar un alto grado de paralelismo entre los ejes del sistema de referencia, predominando únicamente desplazamientos traslacionales, mas no rotacionales. Por estas razones, se consideró la aplicación únicamente de las traslaciones en el modelo lineal de transformación cinemático de coordenadas geocéntricas.

En la validación del modelo de transformación, para el caso A, correspondiente a la transformación de coordenadas de 24 vértices geodésicos pasivos entre las semanas 2016 y 2167, los resultados mostraron una alta variabilidad, siendo el componente este la de mayor dispersión entre los casos analizados. La Figura 5 muestra que los puntos BIJA e IND1 presentaron las mayores diferencias en el componente norte, mientras que CCOL lo hizo en la este. Por el contrario, los puntos PUMO, RIFO y SAJU registraron las menores diferencias en el componente norte y LAFE mostró la mejor concordancia en ambos componentes, reflejando una transformación más precisa.

Los casos del B al E de transformación de coordenadas evidenciaron un comportamiento progresivo en las diferencias de coordenadas conforme aumentó el intervalo temporal entre las épocas analizadas. En el caso B, las diferencias fueron reducidas, con valores máximos de 5,33 mm en norte y 3,78 mm en este, reflejando una variabilidad limitada. En el caso C, correspondiente a un lapso de 24 semanas, se observaron mayores diferencias en el componente norte, alcanzando valores superiores a 10 mm, lo que indicó una mayor dispersión respecto al componente este, tal y como lo muestra la Figura 6.

La Figura 6, muestra a la estación PJMZ como la de mayor variabilidad en todos los casos dentro del IGB20, acompañada por LCRZ y UCRI en los escenarios con lapsos más amplios. En general, las diferencias crecieron con el tiempo y presentaron un comportamiento irregular entre las estaciones, el cual está correlacionado con la dinámica natural de la corteza terrestre dado por distintos fenómenos sísmicos. Por ejemplo, entre los años 2019 y 2022 se registraron más de una decena de eventos con magnitudes superiores a 4,0 Mw en distintas zonas del territorio nacional de Costa Rica, entre los cuales, destacan un sismo ubicado en Paso Canoas en mayo de 2019 con una magnitud de 6,0 Mw, el sismo con epicentro en Puerto Armuelles en junio de 2019 con una magnitud de 6,4 Mw y el sismo localizado en Jacó en agosto de 2020 con una magnitud de 6,0 Mw ([Observatorio Vulcanológico y Sismológico de Costa Rica, 2026](#)) y ([Red Sismológica Nacional, 2026](#)).

5 Conclusiones

Se desarrolló un modelo cinemático lineal de transformación espacial de coordenadas de nueve parámetros, compuesto por las traslaciones en los tres ejes del sistema de coordenadas, sus respectivas tasas de variación anual y coordenadas del baricentro, mostrados en la Tabla 3. Este modelo se estableció con las soluciones finales semanales de las estaciones GNSS activas del Marco Geodésico Nacional de Referencia CR-SIRGAS. El cual, fue válido para el periodo comprendido entre las épocas de referencia 2019,24 y 2022,90 y dentro del marco internacional ITRF14.

El modelo evidenció la relevancia de incorporar las variaciones temporales de los parámetros en los procesos de transformación de coordenadas a como se mostró en la Figura 5 y Figura 6. Además, permitió que el modelo reflejara adecuadamente la cinemática del territorio costarricense. Esta consideración contribuyó a una determinación más precisa y actualizada de la posición espacial de cualquier punto o estación GNSS ubicada dentro del territorio nacional.

Conforme a la investigación realizada se tuvieron que llevar varios procesos estadísticos para definir un valor de tolerancia para el uso de las estaciones GNSS en la estimación de los parámetros de transformación. Por lo cual, se estimaron tres conjuntos de parámetros utilizando datos filtrados según tres valores distintos de tolerancia, determinados por el límite máximo permitido para los residuales del ajuste mediante el método de mínimos cuadrados. No obstante, y como resultado del análisis realizado, se definió que el conjunto de parámetros correspondiente a una tolerancia de $\pm 30,00$ mm ofrecía el mejor equilibrio entre ajuste estadístico y consistencia geodésica. Esta decisión respondió al objetivo de mantener la calidad y consistencia del marco de referencia CR-SIRGAS, sin comprometer su precisión a lo largo del estudio. Por ello, la formulación final del modelo cinemático lineal para la transformación espacial de coordenadas se basó exclusivamente en dicho conjunto de parámetros, los cuales fueron descritos por la Tabla 3.

El cálculo de tres conjuntos distintos de parámetros de transformación permitió analizar la influencia de la cantidad de puntos idénticos utilizados en cada proceso de estimación. Se evidenció que, al aumentar el número de estaciones GNSS consideradas, los parámetros obtenidos reflejaban con mayor fidelidad el comportamiento espacial del marco de referencia, mostrando valores más estables y representativos de su naturaleza geodésica. Esto respaldó la importancia de emplear la mayor cantidad de datos disponibles con altas precisiones en los procesos de cálculo, ya que cuando se utilizó un número mínimo de puntos se pudo comprometer la precisión y confiabilidad de los parámetros de transformación.

Los resultados obtenidos para cada conjunto de parámetros de transformación evidenciaron que las traslaciones de los ejes del sistema de coordenadas se ajustaron adecuadamente al modelo lineal, tal y como

lo describió la Figura 3. No obstante, las rotaciones no presentaron un comportamiento lineal consistente, lo que indicó que no pudieron ser representadas de forma adecuada mediante un modelo de regresión lineal. En este sentido, las rotaciones requerirían una modelación mediante un enfoque distinto que incorporara probablemente una función más compleja. Es importante recalcar el hecho de que, aunque las variaciones de las rotaciones fueron muy ruidosas como lo mostró la Figura 3, los valores se encontraron en una escala de subsegundos de arco, es decir, prácticamente ejes paralelos, pudiendo asumir que sus valores fueron prácticamente nulos y no influirían en los resultados. Por esta razón, el modelo cinemático lineal propuesto para la transformación espacial de coordenadas se estableció exclusivamente con los componentes de traslación y sus respectivas tasas de cambio temporal. Los resultados demostraron que el cambio semanal de CR-SIRGAS obedeció principalmente a cambios en los parámetros de traslación y los ejes permanecían prácticamente paralelos.

Uno de los principales aportes de esta investigación radica en la incorporación específica del factor tiempo en los procesos de transformación, parámetro que se deslinda de los modelos estáticos tradicionales. Los resultados obtenidos demostraron que las variaciones temporales influyeron de manera significativa en la precisión de las coordenadas transformadas, lo que justificó la necesidad de adoptar modelos dinámicos que reflejen adecuadamente la cinemática presente en los marcos de referencia, como lo es en Costa Rica; país donde existe una gran influencia por los distintos procesos geofísicos y cinemáticos en la posición espacial de los objetos.

6 Referencias

- Aguilar, L. (2025). Implementación de un modelo cinemático lineal para la transformación espacial de coordenadas basado en las soluciones semanales finales de las estaciones GNSS activas del Marco Geodésico Nacional de Referencia CR-SIRGAS: épocas de referencia 2019,24 y 2022,90. Tesis de Licenciatura. doi: <https://hdl.handle.net/11056/33379>.
- Altamimi, Z., Rebischung, P., Collilieux, X., Métivier, L., y Chanard, K. (2023). ITRF2020: an augmented reference frame refining the modeling of nonlinear station motions. *Journal of Geodesy*, 97(47). doi: <https://doi.org/10.1007/s00190-023-01738-w>.
- Altamimi, Z., Rebischung, P., Collilieux, X., Métivier, L., y Collilieux, X. (2016). ITRF2014: A new release of the International Terrestrial Reference Frame modeling nonlinear station motions. *Journal of Geodesy*, 121(8). doi: <https://doi.org/10.1002/2016JB013098>.
- Bitharis, S., Papadopoulos, N., Pikridas, C., Fotiou, A., Rossikopoulos, D., y Kagiadakis, V. (2018). Assessing a new velocity field in Greece towards a new semi-kinematic datum. *Survey Review*, 51(368):450–459. doi: <https://doi.org/10.1080/00396265.2018.1479937>.
- GNU Octave Community (2023). GNU Octave (version 8.3.0) [computer software]. <https://www.gnu.org/software/octave/>.
- Hofmann-Wellenhof, B., Lichtenegger, H., y Wasle, E. (2008). *GNSS – Global Navigation Satellite Systems: GPS, GLONASS, Galileo and more*. Springer. ISBN: 978-3-211-73012-6.
- Hofmann-Wellenhof, B. y Moritz, H. (2005). *Physical Geodesy*. Springer, 1a edición. ISBN: 10-3-211-23584-1.

- Kheloufi, N. y Dehni, A. (2023). Some mathematical assumptions for accurate transformation parameters between WGS84 and Nord Sahara geodetic systems. *Journal of Geodetic Science*, 13(1):20220160. doi: <https://doi.org/10.1515/jogs-2022-0160>.
- Moya, J., Bastos, S., y Álvarez, A. (2021). Parámetros de transformación entre los marcos geodésicos CR05 y CR-SIRGAS contemplando diferentes soluciones ITRF. *Ingeniería*, 31(1):21–50. doi: <https://doi.org/10.15517/ri.v31i1.43854>.
- Novikova, E., Yeropunova, I., y Palamar, A. (2020). Cambio de sistema de coordenadas en función del área de las parcelas. *Geodesia y Cartografía*, 46(1):26–33. doi: <https://doi.org/10.3846/gac.2020.6979>.
- Observatorio Vulcanológico y Sismológico de Costa Rica (2026). Tabla de sismos sentidos. Disponible en línea: <https://www.ovsicori.una.ac.cr/index.php/sismos-sentidos>.
- Red Sismológica Nacional (2026). Boletines mensuales. Disponible en línea: <https://rsn.ucr.ac.cr/index.php/actividad-sismica/boletines-mensuales>.
- Soler, T. (1998). A compendium of transformation formulas useful in GPS work. *GPS Solutions*, 72(1):482–490. doi: <https://doi.org/10.1007/s001900050187>.
- Soler, T. y Marshall, J. (2002). Rigorous transformation of variance–covariance matrices of GPS-derived coordinates and velocities. *GPS Solutions*, 6(1):76–90. doi: <https://doi.org/10.1007/s10291-002-0019-1>.
- Soler, T. y Marshall, J. (2003). A note on frame transformations with applications to geodetic datums. *GPS Solutions*, 7(1):23–32. doi: <https://doi.org/10.1007/s10291-003-0044-8>.
- Torge, W. y Müller, J. (2012). *Geodesy*. Deutsche Nationalbibliothek, 4a edición. ISBN: 978-3-11-020718-7.
- Tran, D., Nocquet, J., Luong, N., y Nguyen, D. (2022). Determination of Helmert transformation parameters for continuous GNSS networks: a case study of the Géoazur GNSS network. *Geo-Spatial Information Science*, 26(1):125–138. doi: <https://doi.org/10.1080/10095020.2022.2138569>.
- Zhiping, L., Yunying, Q., y Shubo, Q. (2014). *Geodesy, Introduction to Geodetic Datum and Geodetic Systems*. Springer, Heidelberg New York, Dordrecht London. ISBN: 978-3-642-41244-8.